ГЕОМЕТРИЯ

Права, ос, лъч, полуравнина, отсечка

А1. Всяка права има безброй много точки.

А2. През две различни точки минава само една права.

О. Ос се нарича права с избрана положителна посока върху нея.

О. Лъч: Ако върху права изберем точка O, тя разделя правата на две части, всяка от които се нарича лъч с начало O.

О. Полуравнина: Ако в равнина се начертае права p, тя разделя равнината на две полуравнини с контур правата p.

О. Отсечка се нарича част от права, ограничена с две точки.

О. Дължина на отсечка се нарича положителното число, получено при измерването ѝ с избрана мерна единица за дължина. Означаваме дължината на отсечката AB с $|AB|$ или само AB.

О. Разстояние между две точки A **и** B се нарича дължината на отсечката AB.

О. Равни отсечки: Две отсечки се наричат равни, ако са равни дължините им, измерени с една и съща мерна единица.

А3. Аксиома за еднозначно нанасяне на отсечка върху лъч:

Ако две равни отсечки се нанасят върху лъч, краищата им съвпадат.

О. Казва се, че отсечката AB е по-малка от отсечката CD, когато дължината на AB е по-малка от дължината на отсечката CD ($AB < CD$).

О. Среда на отсечка: Ако точката B е между точките A и C и $AB = BC$, точката B се нарича среда на отсечката AC.

Ъгъл. Видове ъгли

О. Ъгъл: Геометрична фигура, която се състои от два лъча с общо начало, се нарича ъгъл.

О. Изправен ъгъл: Ъгъл, чиито рамене са противоположни лъчи, се нарича изправен ъгъл.

О. Съседни ъгли: Два ъгъла, които имат общо рамо, а другите им рамене са противоположни лъчи, се наричат съседни ъгли.

О. Прав ъгъл: Ъгъл, равен на своя съседен, се нарича прав ъгъл.

О. Противоположни (връхни) ъгли: Два ъгъла, раменете на които са противоположни лъчи, се наричат противоположни (връхни) ъгли.

Т. Мярката на изправения ъгъл е 180°.

О. Ъгъл с мярка 90°, се нарича **прав** ъгъл.

О. Ъгъл, който е по-малък от 90°, се нарича **остър** ъгъл.

О. Ъгъл, който е по-голям от 90° и по-малък от 180°, се нарича **тъп** ъгъл.

О. Два ъгъла се наричат равни, ако имат равни мерки.

А4. Аксиома за еднозначно нанасяне на ъгли:

Ако два равни ъгъла с общо рамо се нанасят в една полуравнина с контур това общо рамо, вторите им рамене съвпадат.

О. Ъглополовяща на даден ъгъл се нарича лъчът с начало върха на ъгъла, който разделя този ъгъл на два равни ъгъла.

Т. Сборът на два съседни ъгъла е $180°$.

Т. Съседен ъгъл на прав ъгъл е също прав ъгъл.

Т. Ако два съседни ъгъла са равни, то всеки един от тях е прав.

Т. Всеки два противоположни ъгъла са равни.

Т. Два ъгъла с взаимноуспоредни рамене от един и същ вид са равни.

Т. Два ъгъла с взаимноперпендикулярни рамене от един и същ вид са равни.

Взаимно положение на прави в равнината

О. Пресекателни прави: Две прави, които имат една обща точка, се наричат пресекателни (пресичащи се) прави.

О. Успоредни прави: Две прави, които нямат обща точка, се наричат успоредни прави.

О. Перпендикулярни прави: Две прави се наричат перпендикулярни, ако при пресичането си образуват прав ъгъл.

Т. През точка, която лежи на дадена права, минава само една права, перпендикулярна на дадената права.

О. Разстояние от точка до права: Разстояние от точка A до права a се нарича дължината на отсечката с краища точката A и петата на перпендикуляра, спуснат от точката A към правата a.

А5. Аксиома за успоредните прави:

През точка, нележаща на дадена права, минава не повече от една права, успоредна на дадената.

Теореми следствия:

1. Ако две прави поотделно са успоредни на трета, то те са успоредни.
2. Ако права пресича едната от две успоредни прави, тя пресича и другата.

Т. Признак за успоредност на две прави: Ако при пресичането на две прави с трета права една двойка кръстни ъгли са равни, то правите са успоредни.

Теореми признаци:

1. Ако при пресичането на две прави с трета една двойка **съответни** ъгли са равни, то двете прави са успоредни.
2. Ако при пресичането на две прави с трета сборът на двойка **прилежащи** ъгли е $180°$, то двете прави са успоредни.
3. Ако две прави поотделно са перпендикулярни на трета, то те са успоредни помежду си.

Т. Свойство на успоредните прави: Ако две прави са успоредни и са пресечени с трета права, то:

– всяка двойка **кръстни** ъгли са равни;

– всяка двойка **съответни** ъгли са равни;

– сборът на всяка двойка **прилежащи ъгли** е равен на $180°$.

Теореми следствия:

1. Ако права е перпендикулярна на едната от две успоредни прави, тя е перпендикулярна и на другата права.

2. През точка, нележаща на дадена права, минава точно една права, перпендикулярна на дадената.

О. Разстояние между успоредни прави се нарича разстоянието от коя да е точка от едната права до другата права.

Т. Ако две прави са успоредни, то точките от едната от тях се намират на равни разстояния до другата права.

Триъгълник – определение, видове, височина, медиана, ъглополовяща

О. Триъгълник: Геометрична фигура, определена от три точки, които не лежат на една права, и съединяващите ги отсечки, се нарича триъгълник.

Точките се наричат върхове на триъгълника, а отсечките, които ги съединяват – негови страни.

Видове триъгълници

а) **Според страните**:
– разностранен, когато трите му страни са две по две различни;
– равнобедрен, когато има две равни страни;
– равностранен, когато трите му страни са равни.

б) **Според ъглите**:
– остроъгълен, когато трите му ъгъла са остри;
– правоъгълен, когато един от ъглите е прав;
– тъпоъгълен, когато един от ъглите е тъп.

О. Медиана на триъгълник: Отсечката, която съединява връх на триъгълник със средата на срещулежащата му страна, се нарича медиана през този връх.

Всеки триъгълник има три медиани, за които може да се провери (например чрез точно чертане), че минават през една точка, наречена **медицентър**.

О. Ъглополовяща на триъгълник. Отсечка, спусната от връх на триъгълник до срещулежащата му страна, която разполовява ъгъла при този връх.

Всеки триъгълник има три ъглополовящи, за които може да се докаже (провери), че минават през една точка.

О. Височина в триъгълник: Отсечка, спусната от връх на триъгълник към правата, определена от срещулежащата му страна, и перпендикулярна на тази страна.

Краят на височината, която лежи на страната (или нейното продължение, ако триъгълникът е тъпоъгълен), се нарича **пета** на височината.

Всеки триъгълник има три височини. Правите, върху които лежат височините (може да се провери), минават през една точка, наречена **ортоцентър**.

Ъгли в триъгълник

Т. Сборът от ъглите на всеки триъгълник е $180°$.

Теореми следствия:

1. Сборът от острите ъгли в правоъгълен триъгълник е равен на $90°$.

2. Във всеки триъгълник най-много един ъгъл е тъп или прав.

О. Външен ъгъл на триъгълник се нарича съседният ъгъл на кой да е вътрешен негов ъгъл.

Т. Всеки външен ъгъл на триъгълника е равен на сбора на двата вътрешни, несъседни на него ъгли.

Т. Всеки външен ъгъл на триъгълника е по-голям от всеки вътрешен, несъседен на него ъгъл от същия триъгълник.

Еднакви триъгълници

О. Еднакви триъгълници: Два триъгълника, които имат съответно равни страни и съответно равни ъгли, се наричат еднакви.

А6. За еднозначно нанасяне на триъгълник в полуравнина:

Ако A_1B_1 е отсечка, равна на страна AB на триъгълника ABC, и лежи на контура на полуравнина λ, то в λ има точно една точка C_1 такава, че триъгълниците $A_1B_1C_1$ и ABC са еднакви.

Т. (Първи признак). Ако две страни и ъгъл между тях от един триъгълник са съответно равни на две страни и ъгъл между тях от друг триъгълник, то двата триъгълника са еднакви.

Т. (Втори признак). Ако страна и два ъгъла от един триъгълник са съответно равни на страна и два ъгъла от друг триъгълник, то двата триъгълника са еднакви.

Т. (Трети признак). Ако трите страни на един триъгълник са съответно равни на трите страни от друг триъгълник, то двата триъгълника са еднакви.

Т. (Четвърти признак). Два правоъгълни триъгълника са еднакви, ако катет и хипотенуза от единия триъгълник са съответно равни на катет и хипотенуза от другия триъгълник.

Т. Свойство на еднаквите триъгълници: Ако два триъгълника са еднакви, то:

- съответните им височини са равни;
- съответните им медиани са равни;
- съответните им ъглополовящи са равни.

Равнобедрен триъгълник

О. Триъгълник, на който две от страните са равни, се нарича **равнобедрен.** Равните страни се наричат бедра, а третата страна се нарича основа на равнобедрения триъгълник

Теореми свойства:

1. В равнобедрен триъгълник ъглите при основата са равни.
2. В триъгълник срещу равни страни лежат равни ъгли и срещу равни ъгли лежат равни страни.

Т. В равнобедрен триъгълник медианата, ъглополовящата и височината през върха към основата му съвпадат и лежат на симетралата на основата.

Теореми признаци:

1. Ако в един триъгълник два от ъглите са равни, то той е равнобедрен.
2. Един триъгълник е равнобедрен ако:

а) медианата и височината през един от върховете съвпадат;

б) медианата и ъглополовящата през един от върховете съвпадат;

в) ъглополовящата и височината през един от върховете съвпадат.

Равностранен триъгълник

О. Триъгълник, на който трите страни са равни, се нарича **равностранен**.

Теореми свойства:

1. В равностранния триъгълник трите ъгъла са равни на 60°.
2. В равностранния триъгълник всички височини, медиани и ъглополовящи са равни.

Теореми признаци:

1. Ако един триъгълник е равнобедрен и има ъгъл 60°, то той е равностранен.
2. Ако в триъгълник трите ъгъла са равни, той е равностранен.

Правоъгълен триъгълник

О. Триъгълник, който има прав ъгъл, се нарича **правоъгълен**. Страните, които сключват правия ъгъл, се наричат катети, а страната срещу правия ъгъл – хипотенуза.

Теореми свойства:

1. Ъглите при основата на равнобедрен правоъгълен триъгълник са равни на 45°.
2. Ако в правоъгълен триъгълник един от острите ъгли е 30°, то катетът срещу този ъгъл е равен на половината от хипотенузата.
3. Ако в правоъгълен триъгълник единият катет е равен на половината от хипотенузата, то острият ъгъл срещу този катет е 30°.
4. Във всеки правоъгълен триъгълник медианата към хипотенузата е равна на половината от хипотенузата.

Теореми признаци:

Ако в триъгълник медианата към една от страните му е равна на половината от тази страна, то ъгълът срещу тази страна е прав (т.е. триъгълникът е правоъгълен).

Симетрала на отсечка

О. Симетрала на отсечка: Права, която е перпендикулярна на дадената отсечка и минава през средата ѝ.

Теорема свойство:

Всяка точка от симетралата на дадена отсечка е на равни разстояния от краищата на отсечката.

Теорема признак:

Всяка точка, която се намира на равни разстояния от краищата на дадена отсечка, лежи на симетралата на тази отсечка.

Ъглополовяща на ъгъл

Теорема свойство:

Всяка точка от ъглополовящата на даден ъгъл е на равни разстояния от раменете на този ъгъл.

Теорема признак:

Всяка точка от вътрешността на даден ъгъл, която е на равни разстояния от раменете му, лежи на ъглополовящата на този ъгъл.

Неравенства в триъгълника

Т. В триъгълник срещу по-голяма страна лежи по-голям ъгъл.

Т. В триъгълник срещу по-голям ъгъл лежи по-голяма страна.

Т. В правоъгълния триъгълник хипотенузата е по-голяма от всеки катет.

Т. Перпендикулярът от точка към права е по-малък от всяка наклонена от същата точка към правата.

Т. В триъгълника всяка страна е по-малка от сбора на другите две страни.

Т. Ако всяка от три дадени отсечки a, b, c е по-малка от сумата на другите две, то има триъгълник със страни, равни на тези три отсечки.

Т. Всяка страна в триъгълника е по-голяма от разликата на другите две страни.

Окръжност

О. Окръжност: Геометрична фигура, състояща се от всички точки, които са на дадено разстояние от дадена точка, се нарича окръжност.

О. Дадената точка се нарича **център**.

О. Разстоянието от центъра до произволна точка от окръжността се нарича **радиус**.

О. Отсечката, която свързва две различни точки от окръжността, се нарича **хорда**.

О. Хорда, минаваща през центъра на окръжността, се нарича **диаметър**.

О. Централен ъгъл: Ъгъл, с връх центъра на окръжността и рамене пресичащи окръжността.

Т. Ако в две окръжности с равни радиуси две хорди са равни, то и съответните им централни ъгли са равни и обратно – на равни централни ъгли съответстват равни хорди.

Четириъгълник. Успоредник

Т. Сборът от ъглите на четириъгълника е $360°$.

О. Успоредник: Четириъгълник, на който срещулежащите страни са две по две успоредни, се нарича успоредник.

Теореми свойства:

1. В успоредника двойките срещуположни страни са равни.
2. В успоредника срещуположните ъгли са равни.
3. В успоредника сборът от прилежащите ъгли на всяка страна е $180°$.

4. В успоредника диагоналите взаимно се разполовяват.

Теореми признаци:

1. Четириъгълник, на който двойките срещуположни страни са равни, е успоредник.

2. Четириъгълник, на който една двойка срещуположни страни са успоредни и равни, е успоредник.

3. Четириъгълник, на който диагоналите взаимно се разполовяват, е успоредник.

Правоъгълник

О. Правоъгълник: Успоредник с прав ъгъл е правоъгълник.

Теорема свойство:

В правоъгълника диагоналите са равни.

Теореми признаци:

1. Успоредник с равни диагонали е правоъгълник.
2. Четириъгълник с три прави ъгъла е правоъгълник.

Ромб

О. Ромб. Успоредник с равни съседни страни се нарича ромб.

Теореми свойства:

1. В ромба диагоналите са взаимно перпендикулярни.
2. В ромба диагоналите са ъглополовящи на ъглите му.

Теореми признаци:

1. Успоредник, на който диагоналите са взаимно перпендикулярни, е ромб.
2. Четириъгълник, на който всички страни са равни, е ромб.

Т. Лицето на ромб е равно на полупроизведението от двата му диагонала.

Квадрат

О. 1. Правоъгълник с равни съседни страни е квадрат.

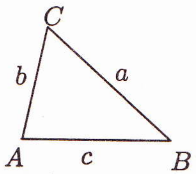
О. 2. Ромб с прав ъгъл е квадрат.

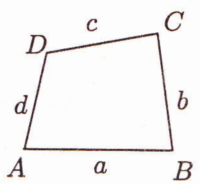
Квадратът притежава всички свойства на успоредника, ромба и правоъгълника.

Т. Лицето на квадрат е равно на половината от квадрата на диагонала му.

Периметри и лица на равнинни фигури

Периметър (обиколка) на триъгълник и четириъгълник

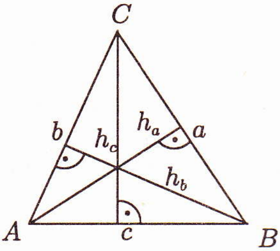


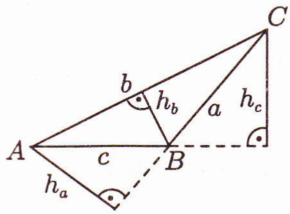


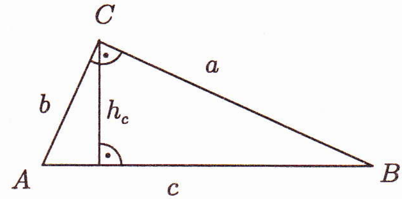
$$P = AB + BC + AC$$
$$P = a + b + c$$

$$P = AB + BC + CD + DA$$
$$P = a + b + c + d$$

Лице на триъгълник





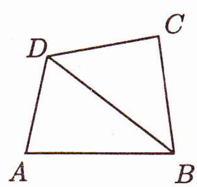


$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

$$\sphericalangle ACB = 90^\circ,\ S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$$

Лице на четириъгълник

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD}$$

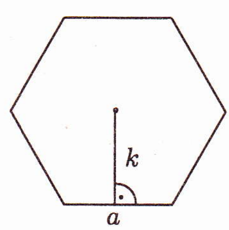


Правилен многоъгълник

$$P = na$$
$$S = \frac{P.k}{2}$$

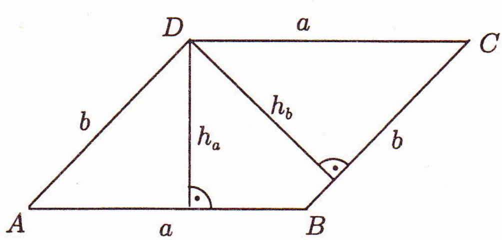
k – апотема

n – броя на страните



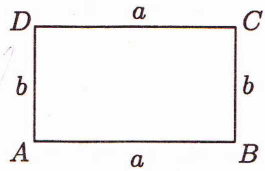
Периметър и лице на успоредник

$$P = 2(a+b)$$
$$S = ah_a = bh_b$$



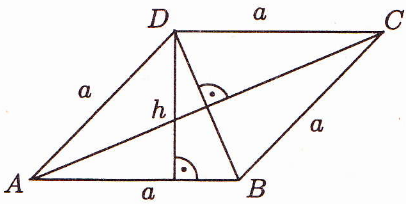
Периметър и лице на правоъгълник

$$P = 2(a+b)$$
$$S = ab$$



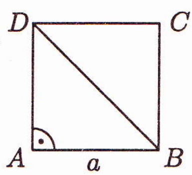
Периметър и лице на ромб

$$P = 4a$$
$$S = ah, \ \ S = \frac{AC.BD}{2}$$



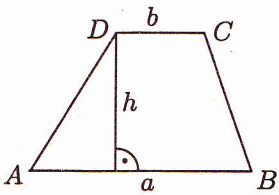
Периметър и лице на квадрат

$$P = 4a$$
$$S = a^2, \ \ S = \frac{BD^2}{2}$$



Лице на трапец

$$S = \frac{(a+b)}{2}.h$$



Дължина на окръжност и лице на кръг

$$C = 2\pi r = \pi d$$
$$(d = 2r)$$
$$S = \pi r^2$$