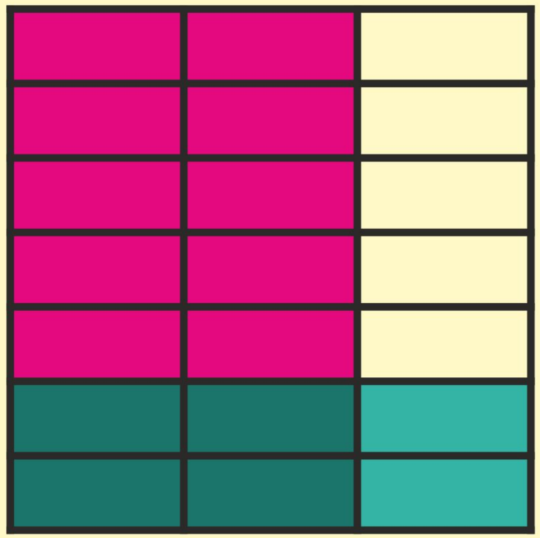
ТОНИ ЧЕХЛАРОВА ЕВГЕНИЯ СЕНДОВА

НЕОБИКНОВЕНО ЗА ОБИКНОВЕНИТЕ ДРОБИ

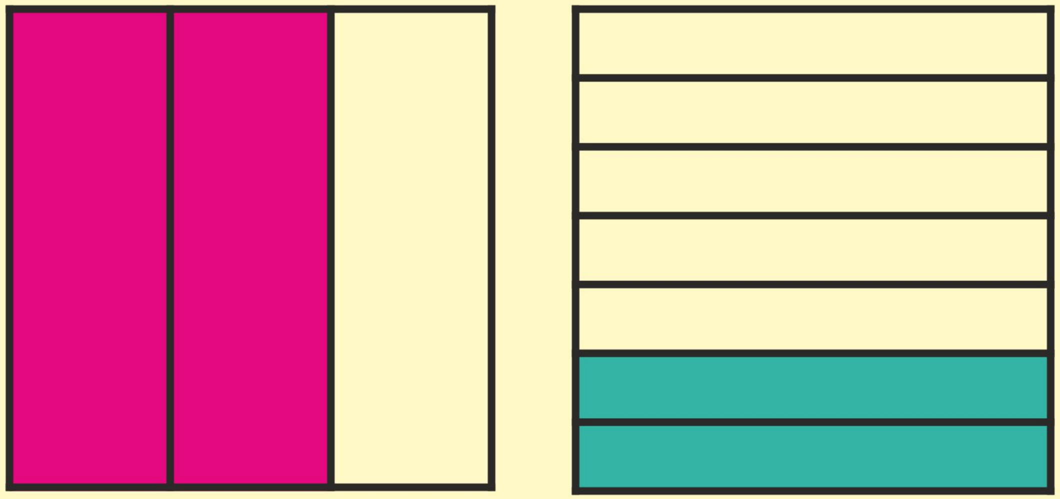
изследвания с динамични конструкции



Макрос

The Fibonacci Project

DISSEMINATING INQUIRY-BASED SCIENCE AND MATHEMATICS EDUCATION IN EUROPE



РАЗПРОСТРАНЯВА СЕ БЕЗПЛАТНО

http://www.math.bas.bg/omi/Fibonacci/index.htm

Тони Чехларова Евгения Сендова

НЕОБИКНОВЕНО
ЗА
ОБИКНОВЕНИТЕ ДРОБИ

изследвания с динамични конструкции

The Fibonacci Project

DISSEMINATING INQUIRY-BASED SCIENCE
AND MATHEMATICS EDUCATION IN EUROPE

2012

Книгата е издадена във връзка с изпълнение на задължения по проект „Fibonacci – разпространение на изследователския подход в образованието по математика и природни науки в Европа”.

Проектът Fibonacci е получил финансиране от Седма рамкова програма на Европейския съюз. Участник от България е Институтът по математика и информатика на БАН.

DISSEMINATING INQUIRY-BASED SCIENCE
AND MATHEMATICS EDUCATION IN EUROPE

http://www.fibonacci-project.eu/

Координатор на проекта за България: акад. Петър Кендеров

© **Автори**: Тони Чехларова, Евгения Сендова

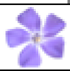
Редактор: акад. Петър Кендеров

Издател: Макрос – www.makros.net

Разпространява се безплатно.
ISBN 978-954-561-282-4

Съдържание

Някои икони от Geogebra

икона	значение	
	преместване	Move
	точка	Point
	лице на фигура	Area
	премества изгледа	Move Graphics View
	плъзгач	slider
	изтрива	Delete
	опреснява изгледа	RefreshViews
	вмъква картина	Insert Image

Можете да работите с динамичните файлове на адрес
http://www.math.bas.bg/omi/Fibonacci/archive.htm

Необходимо е да е инсталирана Java (свободен продукт).
http://www.java.com/en/download/manual.jsp

Препоръчваме инсталиране на Geogebra (свободен продукт).
http://www.geogebra.org/cms/en/installers

Увод

Дробите традиционно са „препъни камък" за много поколения ученици от различни страни. Като математически анекдоти кръжат фрази, чути по време на часове или изпити по математика: *Защрихованата част от кръга е* $\frac{1}{2}$*, а бялата не е нищо, защото дробта трябва да е защрихована...; По-голямата от двете половини..., За мен цялото е половинката...* и т.н. Основната причина вероятно се крие в това, че учениците се учат най-вече как да оперират с дроби (*имаше нещо като умножение на кръст*) и рядко стигат до същността на понятието *дроб.*

Интересен опит за преодоляване на тези слабости в образованието по математика в световен контекст е един експеримент в рамките на *Epistemology and learning group* (http://mathforum.org/library/view/436.html) отпреди 20-ина години на Идит Харел (под научното ръководство на Сиймър Пепърт). в който ученици от 4. клас създават на езика Лого компютърни модели за ученици от 3. клас, с които да им обяснят дробите чрез реалистични ситуации от заобикалящия ги свят – къщи, монети, часовници, продукти и т.н.

Като преподаватели всички сме се убедили, че човек разбира нещо най-добре, когато го преподава.

Но преди да предложим на учениците да влязат в ролята на дизайнери на учебен софтуер на тема *дроби,* можем да ги поканим *да дробят* виртуално в творческа учебна среда. Какво имаме предвид?

В книгата, която държите в ръцете си, сме се опитали да създадем удобни за изследване динамични конструкции, с които учениците да осмислят действията с дроби като действия върху разнообразни геометрични обекти и виртуални предмети (не само като операции върху символи). Нещо повече, очакваме те да направят връзка между различните представяния на дробите (включително тези на древните египтяни и чрез плочки на домино), за да открият общото в наглед различни неща.

Отправили сме предизвикателства и към въображението им и чувството им за хумор – да допълнят с илюстрации карикатурите към всеки урок, с което да покажат по малко по-нетрадиционен начин доколко са усвоили понятията.

И не на последно място очакваме от учениците да получат самочувствието сами да формулират задачи за връстниците си, а защо не и за по-възрастните...

Защото да се научат децата на дроби, проценти (и даже малко повече) е важно за ежедневието и това е добра тясна цел на основното училище. Но идеите на съвременното образование са свързани с по-висша цел – да развием всички ресурси на подрастващите, а математиката (според израза на големия математик и педагог Дьорд Пойа) е *школа за мислене.* Мисленето, което добре може да се усвои при изучаването на математиката в динамична компютърна среда, е свързано с боравене с *материализирани* абстракции, с генериране на предположения, с проверка и коригиране на грешните предположения, с доказване на верните.

Такъв стил на учене и преподаване на математика е в основата на т. нар. *изследователски подход,* чието по-широко разпространение в европейските страни е цел на проекта *Фибоначи* (http://www.math.bas.bg/omi/Fibonacci/). Този подход навлиза в България по-осезаемо днес поради участието ѝ (чрез Института по математика и информатика към Българската академия на науките) в този проект и със специалното съдействие на Университета в Байройт (отправен център в проекта). В резултат на този проект българският екип с координатор акад. Петър Кендеров е разработил и продължава да разработва динамични сценарии на теми, подходящи за ученици от 1-12. клас. Колекцията от материали се обогатява и от учителски разработки.

Естествено ролята на учителя е да допринесе за цялостното развитие на личността на ученика, а в контекста на математиката – да спомогне за развитието на неговото мислене, на умението да прави предположения, да ги коригира, да поставя въпроси, да формулира собствени задачи. *Има толкова добри начини на преподаване, колкото са добрите учители.* И доброто преподаване е по-скоро активно учене. Още Сократ е обрисувал особено цветисто това схващане, а Пойа често го цитира: *Идеята трябва да се роди в главата на ученика, а учителят трябва да действа като акушерка – да не се намесва много рано, а само ако родилните мъки се проточат...*

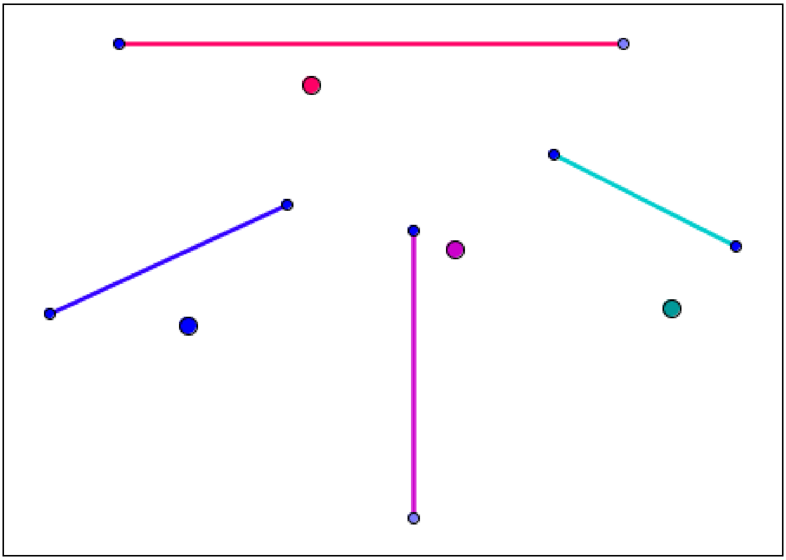
С други думи, голямото предизвикателство в математическото образование е да насърчим децата да действат и мислят като математици, да имат правилно отношение при атакуването на проблемите, да експериментират, формулират и споделят различни свои идеи.

Да напомним, че *Необикновено за обикновените дроби* не е учебник или сборник от задачи в традиционния смисъл. Тази книга би оживяла в ръцете ви, само ако се потопите в нейния виртуален спътник – динамичните сценарии, които ще намерите в приложения диск и на сайта на проекта. Надяваме се, че тези сценарии ще внесат динамика в заниманията ви с дроби и ще вдъхнат нов живот на този интересен и важен дял от математиката.

Авторите

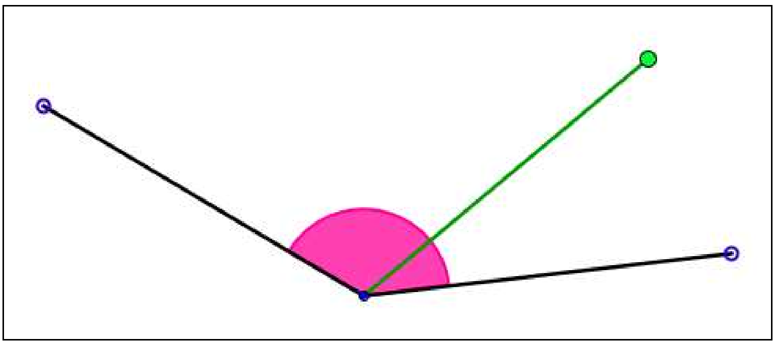
1. Провери и развий окомера си с половинка

1. Отбележи с точка половинката на отсечка.



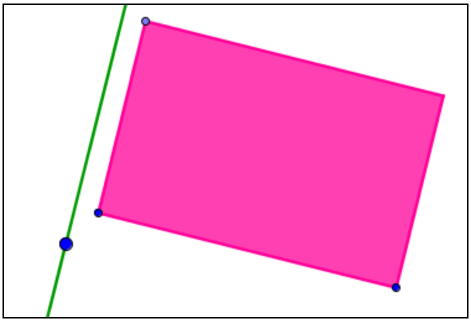
Скрий отговорите и премести краища на отсечки за следващ пример.

2. Отбележи половинката на ъгъла със зелената отсечка.



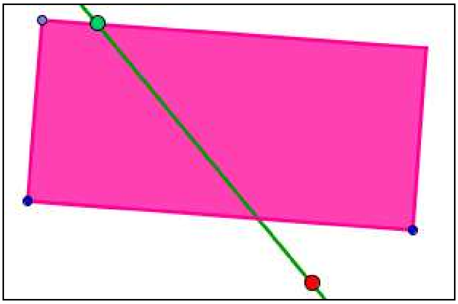
Скрий отговора. За следващ пример променяй ъгъла чрез точките върху раменете му.

3. Отбележи половинка на правоъгълника с правата.



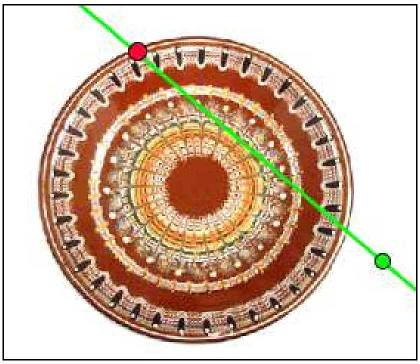
Скрий отговора. За следващ пример премести върхове на правоъгълника.

4. Премести червената точка така, че правата да разделя правоъгълника на две половинки.



Скрий отговора. За следващ пример премести зелената точка и върхове на правоъгълника.

5. Премести зелената точка така, че правата да разделя чинията на две половинки.



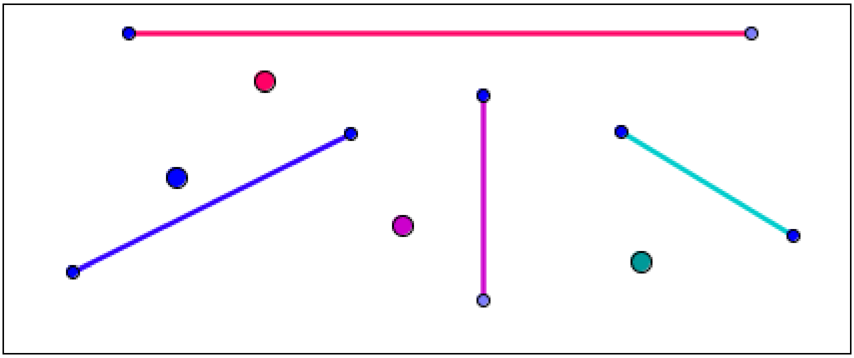
Скрий отговора. За следващ пример премести червената точка.

2. Провери и развий окомера си с третинка

Пропълзях третинката от стълба!

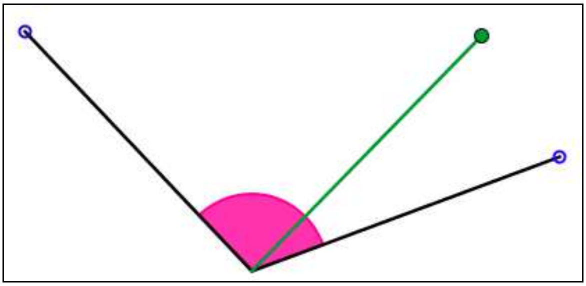
А аз съм на третинка от върха му!

1. Отбележи третинка върху отсечка с точка.



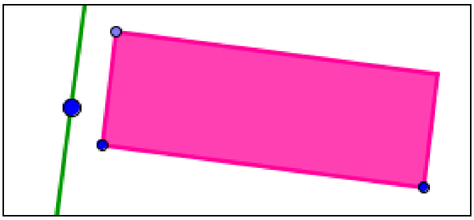
Скрий отговорите и премести краища на отсечки за следващ пример.

2. Отбележи третинка на ъгъла със зелената отсечка.



За следващ пример променяй ъгъла чрез точките върху рамената му.

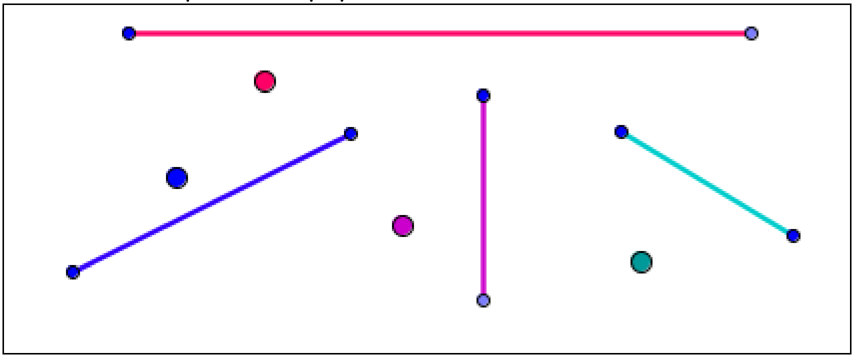
3. Премести правата така, че да се отбележи третинка на правоъгълника.



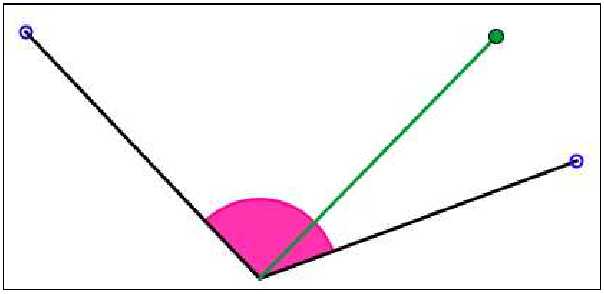
Скрий отговора. За следващ пример премести точки.

3. Провери и развий окомера си с четвъртинка

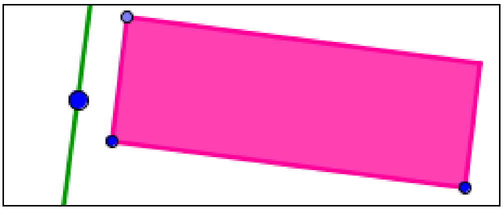
1. Отбележи четвъртинка върху отсечка с точка.



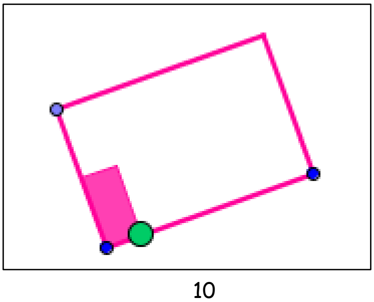
2. Отбележи четвъртинка на ъгъла със зелената отсечка.



3. Отбележи четвъртинка на правоъгълника, като преместиш правата.



4. Премести зелената точка така, че да се отбележи четвъртинка на правоъгълника.

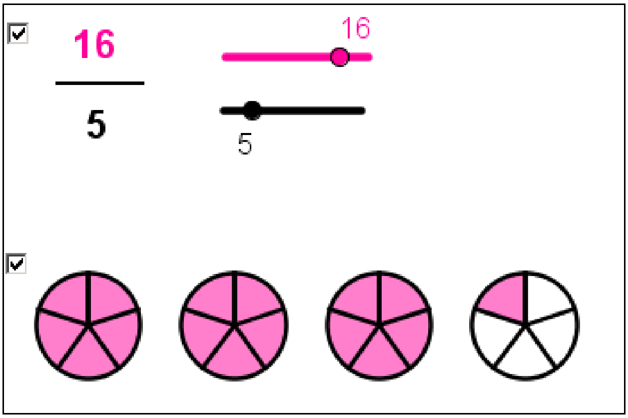


4. Получаване на обикновени дроби

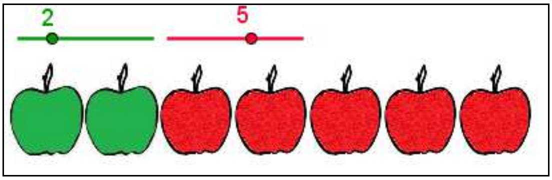
С три разреза получих шестинки от тортата!

А аз с три разреза мога да я разделя на осминки!

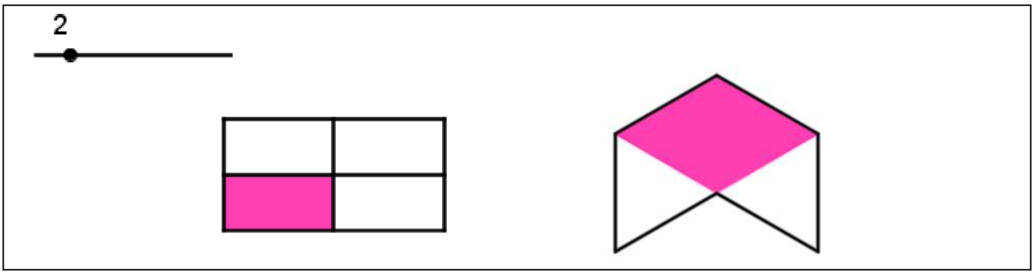
1. Изобрази: $\frac{2}{7}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{7}{7}$; $\frac{8}{7}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{12}{11}$; $\frac{11}{12}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{3}{4}$.



Наблюдавай изменението при равни числители, а след това – при равни знаменатели.



2. Каква част от фигурата е лилава?



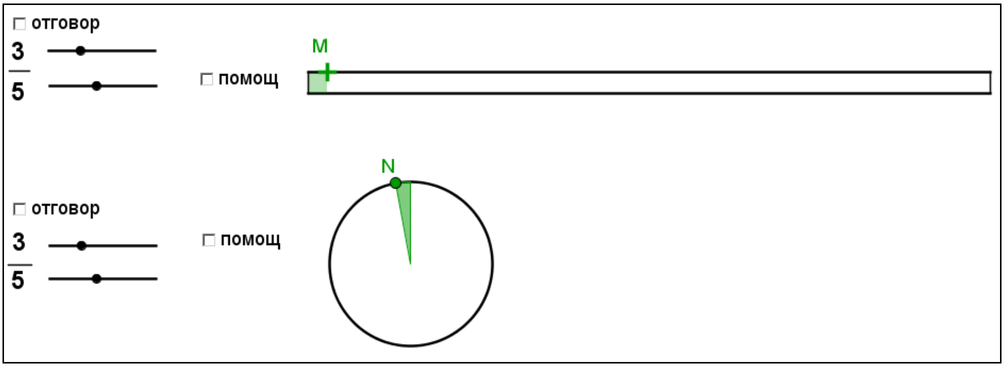
За следващ пример използвай плъзгача.

5. Провери и развий окомера си с обикновени дроби

Аз меря на око.

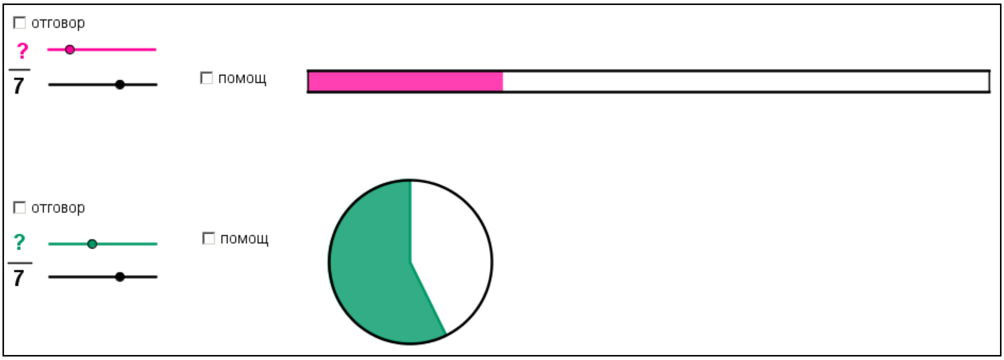
А аз – с педя!

1. Прецени "на око" и представи обикновената дроб, като използваш зелените точки.



Скрий отговорите и помощта и премести плъзгачите за следващ пример.

2. Даден е знаменателят на изобразената обикновена дроб. Прецени "на око" на колко е равен числителят ѝ.



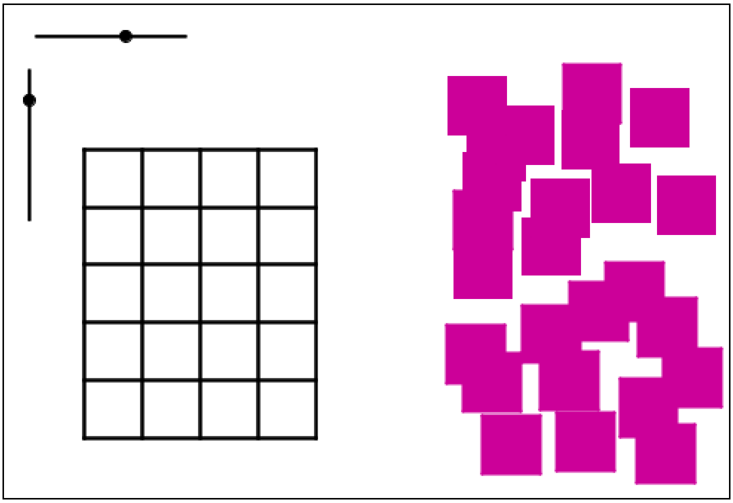
3. Даден е числителят на изобразената обикновена дроб. Прецени "на око" на колко е равен знаменателят ѝ.

6. Оцветяване на част от правоъгълник

Ако поставя още едно цветно квадратче, ще е оцветен половината правоъгълник.

Ако махна едно цветно квадратче, ще е оцветена третинка от правоъгълника!

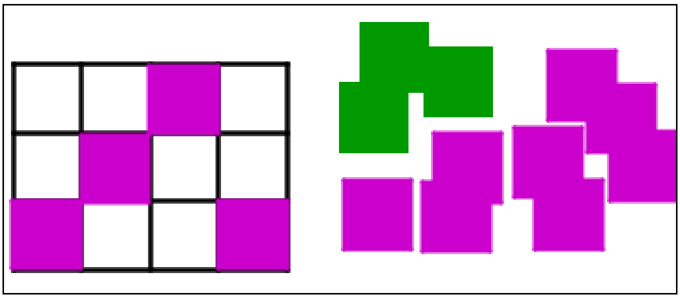
1. Оцвети в лилаво $\frac{7}{20}$ от правоъгълника, като използваш квадратчетата.



Можеш да променяш размерите на правоъгълника с плъзгачите.

2. Оцвети $\frac{1}{3}$ от правоъгълника с лилав цвят и $\frac{1}{2}$ - със зелен цвят.

3. Колко лилави квадратчета трябва да добавиш, за да е лилав половината правоъгълник?



А сега е твой ред да съставиш задачи с тези динамични модели.

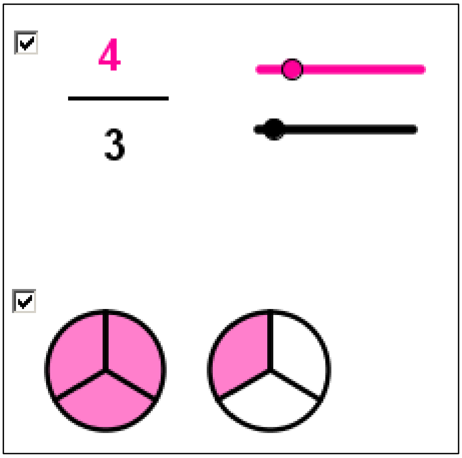
7. Правилни и неправилни дроби

Защо плачеш?

Защото съм била неправилна!

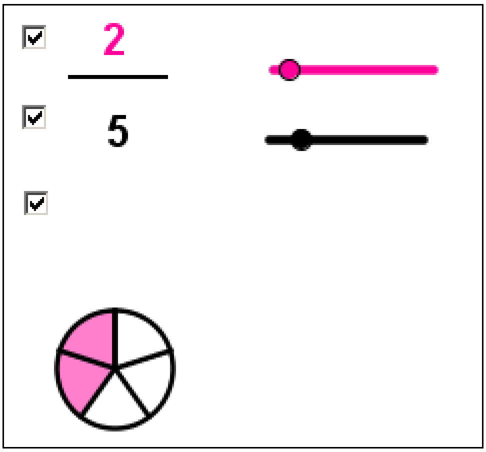
1. Изобрази:

- $\frac{2}{3}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{3}{10}$
- $\frac{5}{5}$; $\frac{12}{12}$; $\frac{2}{2}$
- $\frac{4}{3}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{6}{5}$; $\frac{9}{4}$; $\frac{15}{2}$.



2. Запиши:

- правилните дроби със знаменател 5
- неправилните дроби с числител 7
- неправилните дроби, на които числителят е по-малък или равен на 5.



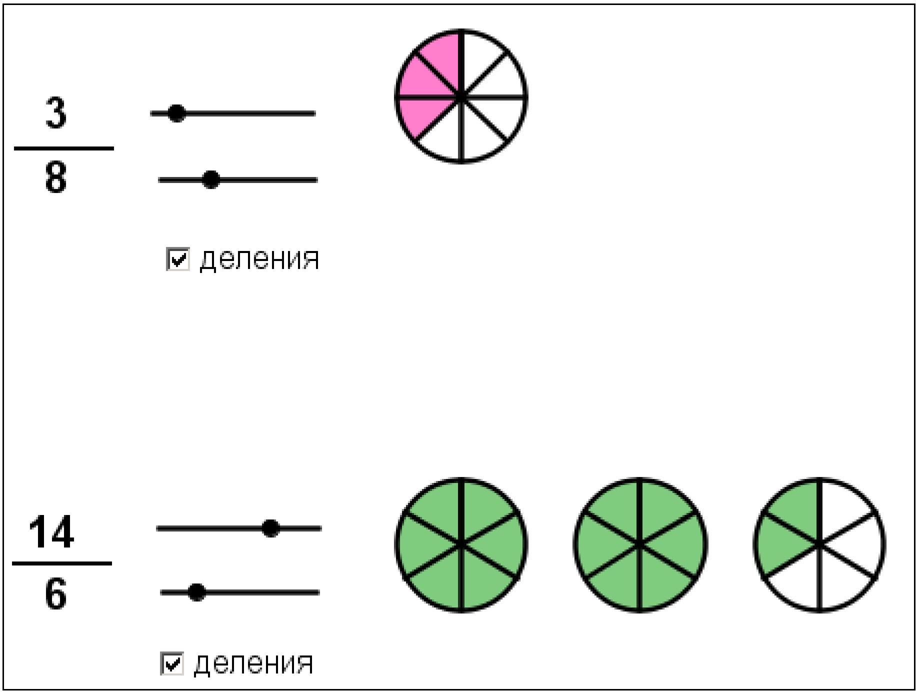
8. Обикновени дроби и естествени числа

Аз съм $\frac{8}{8}$ от шоколада!

1. Сравни:

- пет правилни дроби с числото 1
- пет неправилни дроби с числото 1
- правилна дроб с неправилна дроб.

Направи хипотези.



2. Представи с фигура пет обикновени дроби със знаменател 1.
Направи хипотеза.

3. За кои стойности на цялото число a е изпълнено:

- $\frac{a+3}{5}<1$
- $\frac{a+1}{15}=1$
- $\frac{12}{a+8}>1$?

9. Изобразяване върху числов лъч

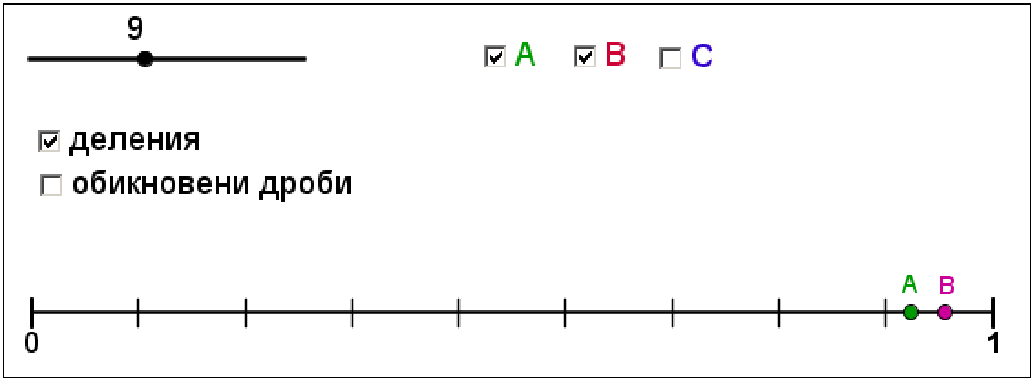
Аз съм вляво и от двете и съм стъпила на $\frac{1}{10}$.

Аз съм два пъти по-близо до лявата, отколкото до дясната.

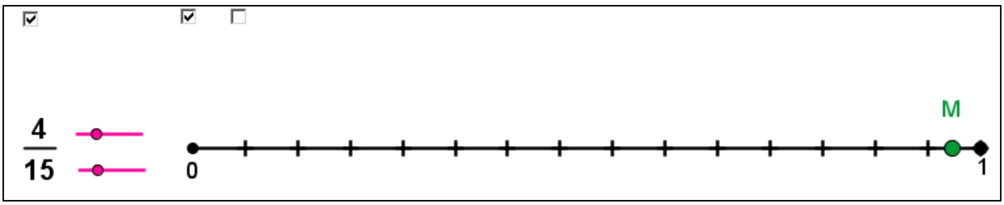
Аз съм 1.

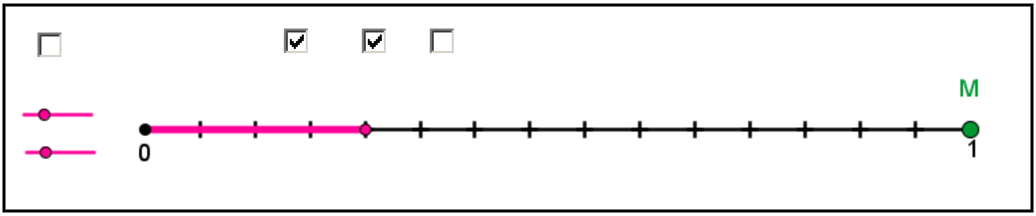
1. Изобрази върху числовия лъч:

$\frac{4}{9}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{6}{9}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{8}{9}$; $\frac{9}{9}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{4}{15}$; $\frac{8}{19}$.



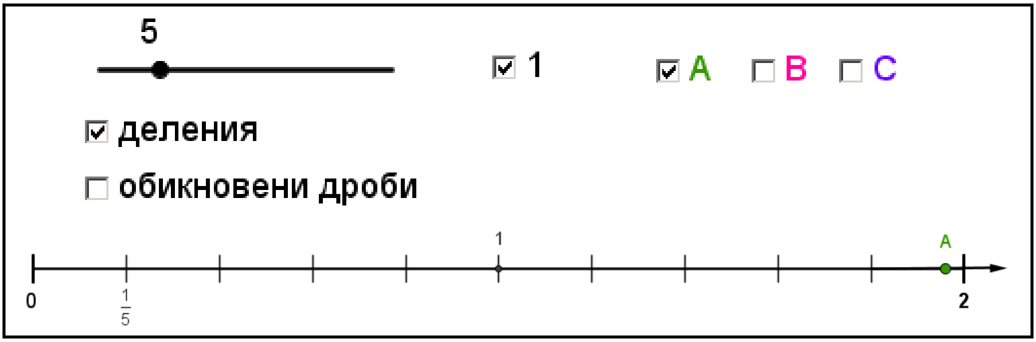
Потренирай в двете посоки!



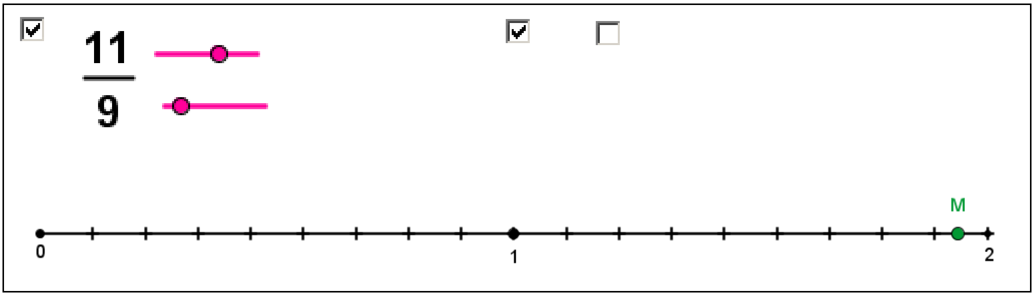


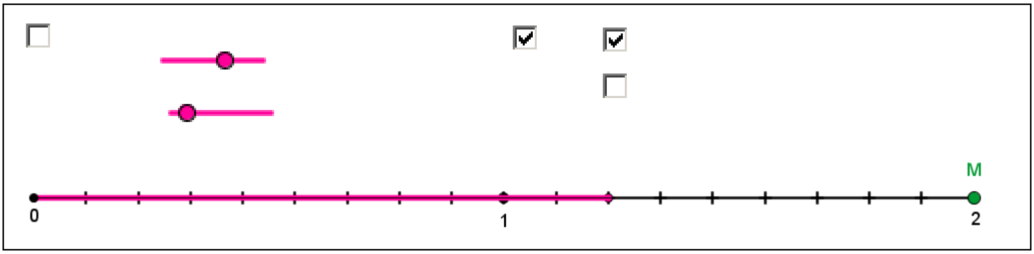
2. Изобрази върху числовия лъч:

$\frac{2}{5}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{5}$; $\frac{6}{5}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{8}{5}$; $\frac{9}{5}$; $\frac{10}{5}$; $\frac{11}{6}$; $\frac{10}{11}$; $\frac{12}{11}$; $\frac{14}{11}$; $\frac{20}{19}$.



Потренирай в двете посоки!



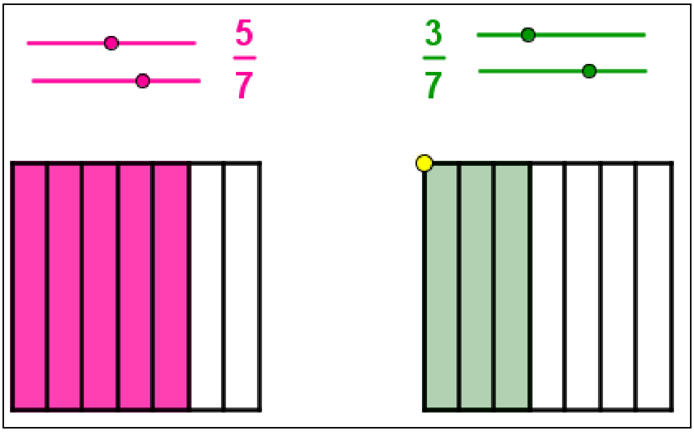


10. Сравняване на обикновени дроби с равни знаменатели

Знаменателите ни са равни!

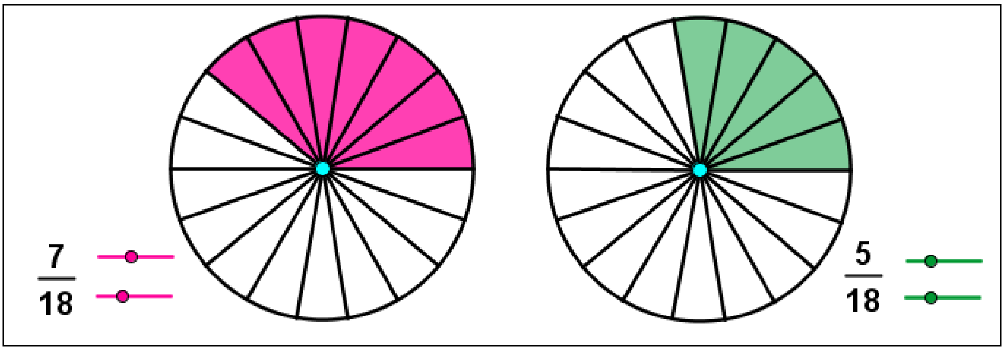
Но аз съм по-голяма!

1. Сравни • $\frac{5}{8}$ и $\frac{2}{8}$ • $\frac{4}{9}$ и $\frac{7}{9}$ • $\frac{2}{5}$ и $\frac{4}{5}$.



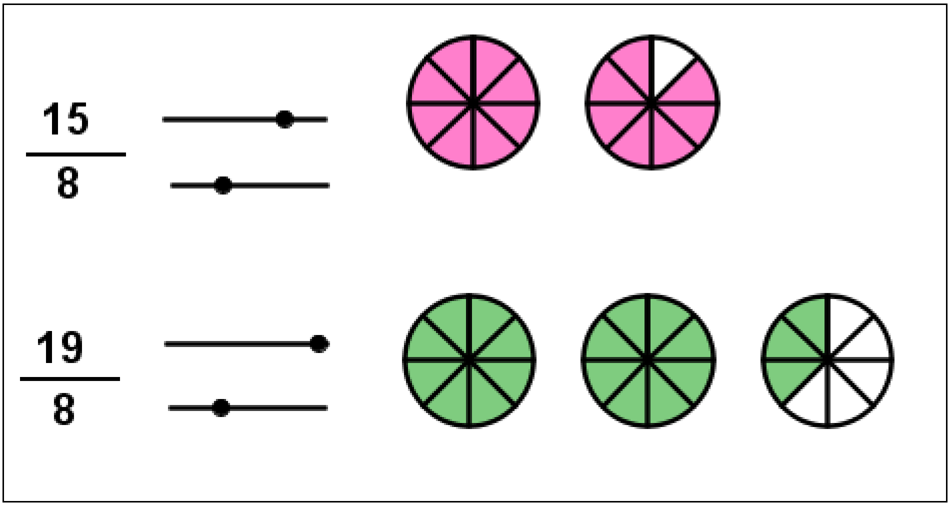
С жълтата точка можеш да местиш зеления квадрат към лилавия.

2. Сравни • $\frac{11}{17}$ и $\frac{4}{17}$ • $\frac{4}{11}$ и $\frac{7}{11}$ • $\frac{14}{15}$ и $\frac{9}{15}$.

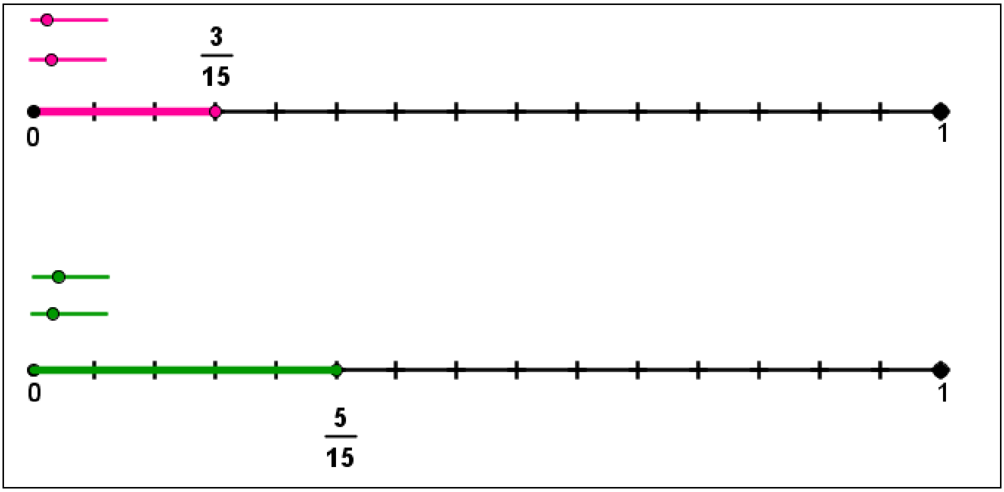


Можеш да местиш кръговете чрез центровете им.

3. Сравни $\frac{15}{8}$ и $\frac{19}{8}$.



4. Запиши обикновените дроби със знаменател 15, които са разположени между $\frac{3}{15}$ и $\frac{5}{15}$.



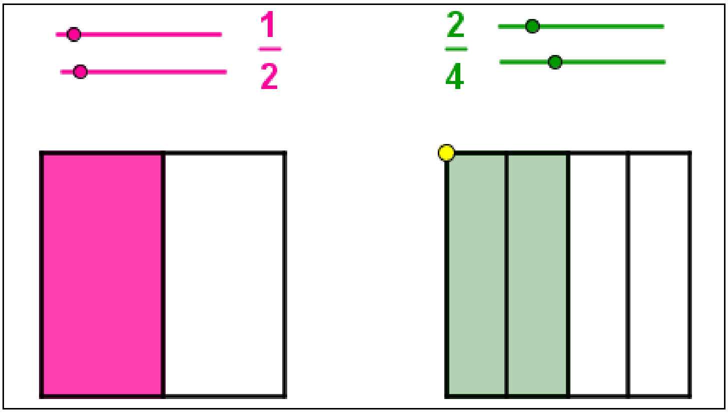
5. За кои стойности на естественото число x е вярно неравенството $\frac{x}{12}<\frac{9}{12}$?

11. Основно свойство

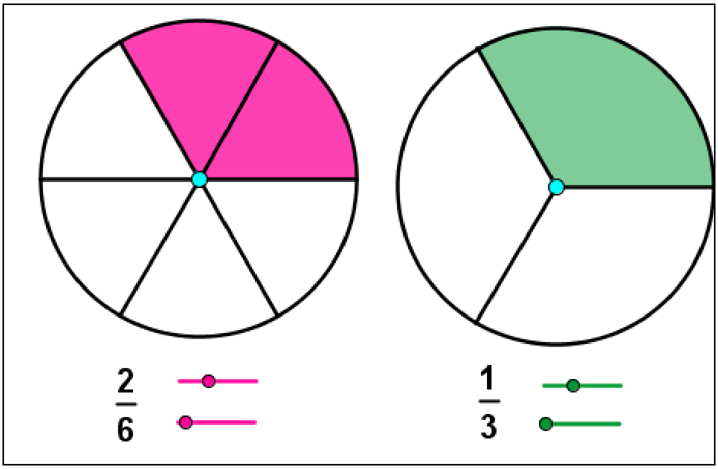
Моята пица е разрязана на 6 равни части.

Моята е същата, но я разрязах само на две, защото съм на диета!

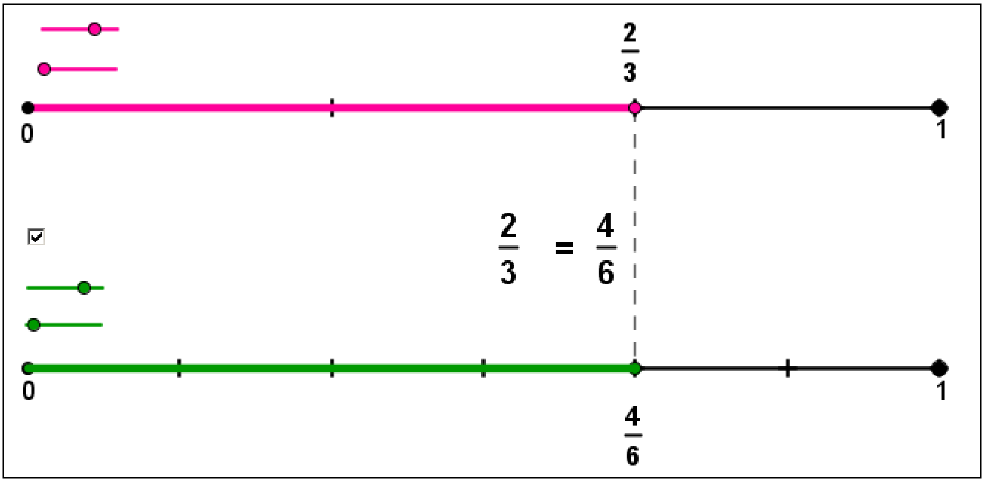
1. Сравни • $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{4}$ • $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{6}$ • $\frac{1}{2}$ и $\frac{4}{8}$ • $\frac{1}{2}$ и $\frac{5}{10}$.



2. Сравни • $\frac{2}{6}$ и $\frac{1}{3}$ • $\frac{3}{9}$ и $\frac{1}{3}$ • $\frac{4}{12}$ и $\frac{1}{3}$.



3. Сравни • $\frac{3}{2}$ и $\frac{6}{4}$ • $\frac{3}{2}$ и $\frac{9}{6}$ • $\frac{3}{2}$ и $\frac{12}{8}$ • $\frac{3}{2}$ и $\frac{18}{12}$.

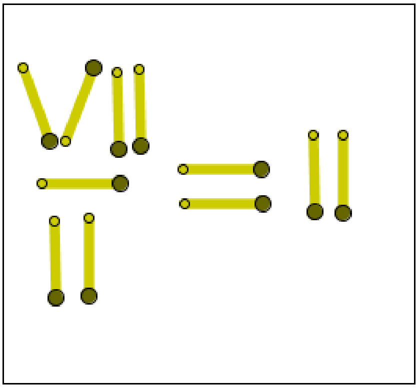


Разгледай двойките сравнявани числа.
Как може да се получи второто число от първото?

Като имаш предвид резултатите от сравняването, формулирай хипотеза.

4. Кои от обикновените дроби $\frac{4}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{6}{8}$; $\frac{31}{41}$; $\frac{23}{24}$; $\frac{33}{44}$ са равни?

5. С преместване на една кибритена клечка получи вярно равенство.

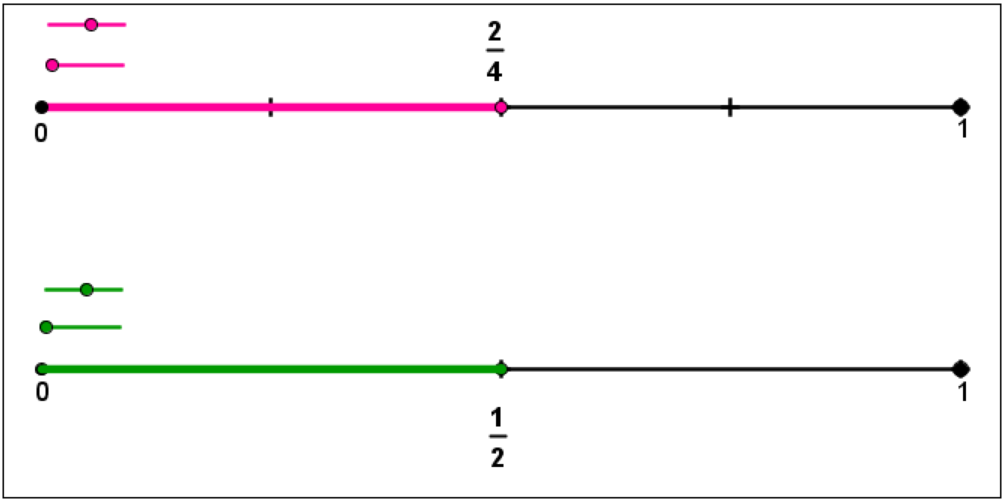


12. Съкратими и несъкратими дроби

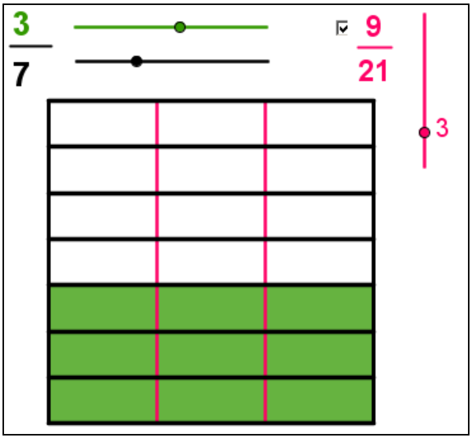
Казаха, че ще ме съкращават!

А на мен - че съм несъкратима!

1. Изобрази и сравни • $\frac{2}{4}$ и $\frac{1}{2}$ • $\frac{6}{10}$ и $\frac{3}{5}$ • $\frac{9}{12}$ и $\frac{3}{4}$.



2. Илюстрирай с модела • $\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$ • $\frac{3}{5}=\frac{18}{30}$.

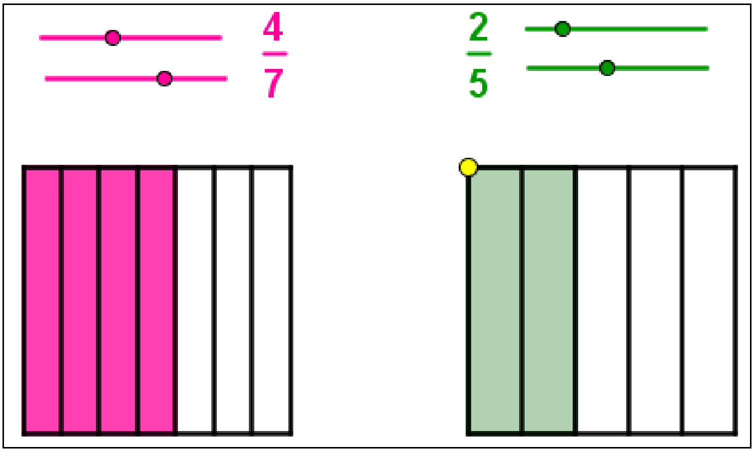


13. Сравняване на обикновени дроби с различни знаменатели

Моят знаменател е по-голям от твоя!

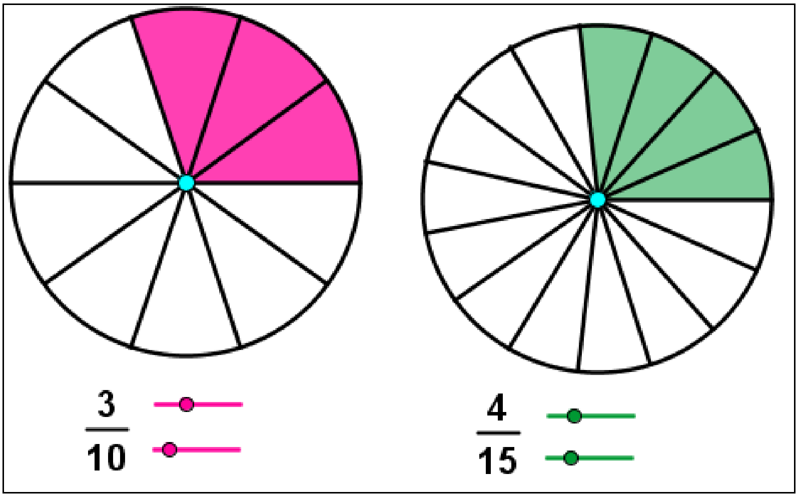
Но аз съм по-голяма!

1. Сравни • $\frac{4}{7}$ и $\frac{2}{5}$ • $\frac{4}{9}$ и $\frac{3}{5}$ • $\frac{5}{6}$ и $\frac{4}{5}$.



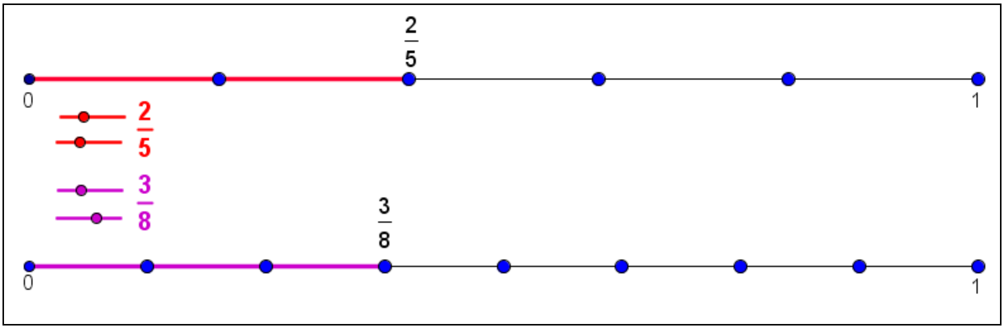
С жълтата точка можеш да местиш зеления квадрат към лилавия.

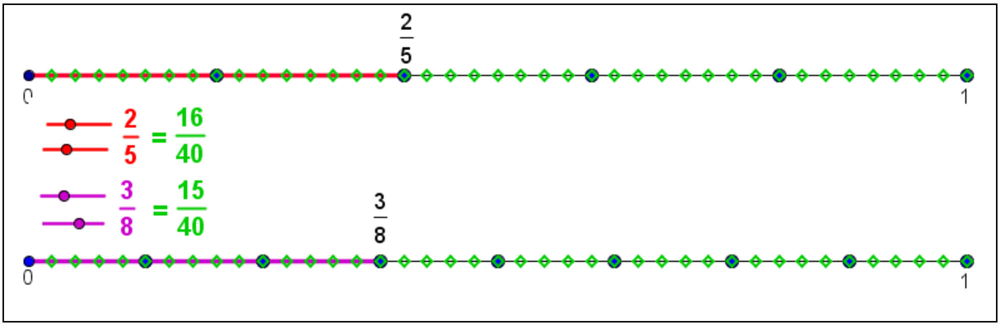
2. Сравни • $\frac{3}{10}$ и $\frac{4}{15}$ • $\frac{14}{19}$ и $\frac{25}{31}$ • $\frac{17}{50}$ и $\frac{3}{14}$.



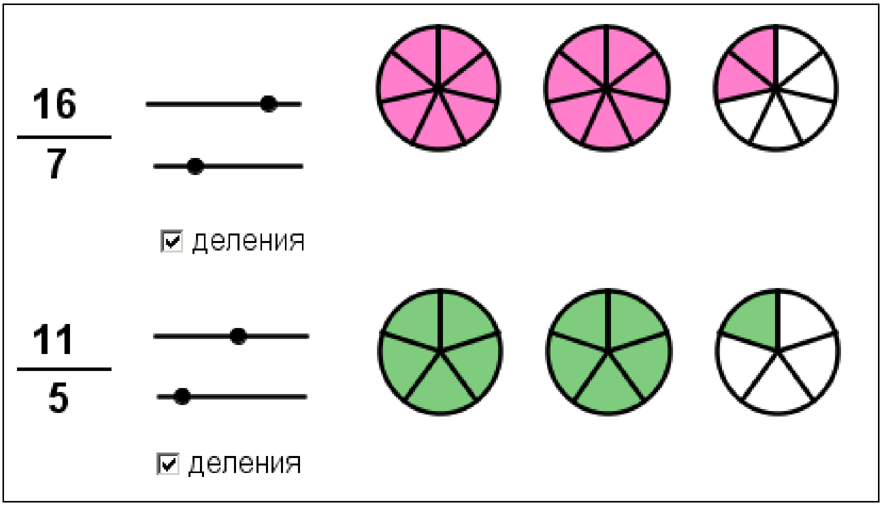
Можеш да местиш кръговете чрез центровете им.

3. Сравни • $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{8}$ • $\frac{5}{12}$ и $\frac{2}{7}$ • $\frac{9}{10}$ и $\frac{10}{11}$.





4. Сравни • $\frac{16}{7}$ и $\frac{11}{5}$ • $\frac{4}{19}$ и $\frac{19}{4}$ • $\frac{11}{20}$ и $\frac{4}{9}$.



14. Събиране на обикновени дроби с равни знаменатели

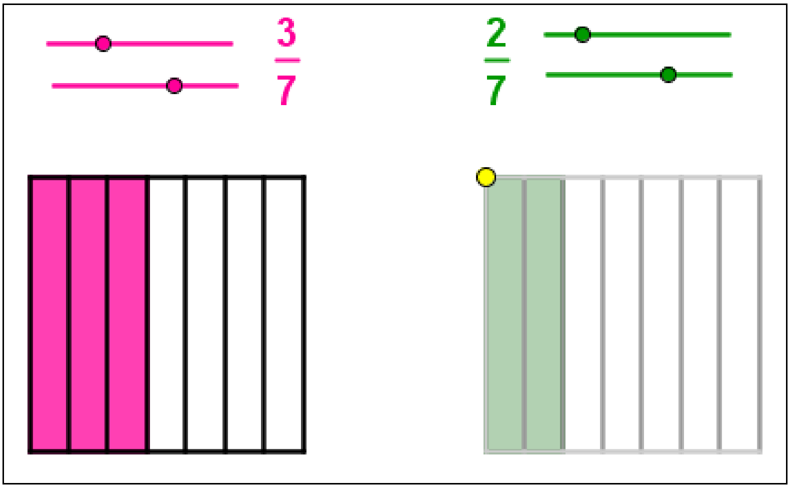
Ако се събера с $\frac{1}{7}$, ще станем $\frac{5}{7}$.

А ако аз се събера с $\frac{1}{7}$, ще станем едно цяло.

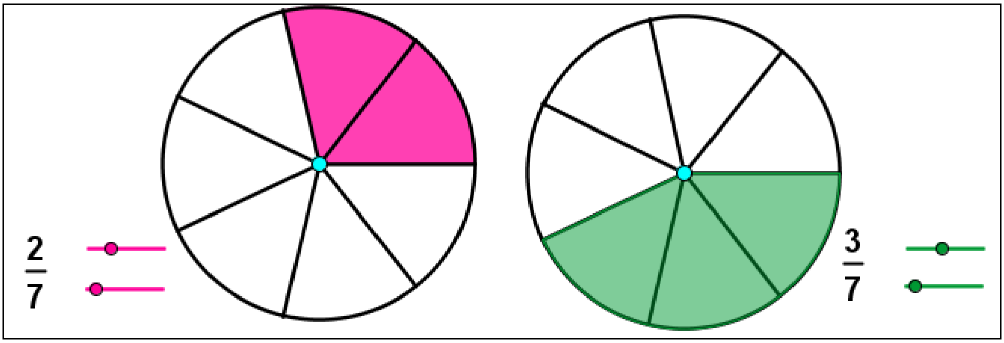
Ангел изял 2 блокчета, а брат му - 3 блокчета от шоколада. Каква част от шоколада са изяли общо двамата?

Моделирай и други случаи с шоколада.

1. Пресметни: • $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}$ • $\frac{2}{9}+\frac{5}{9}$ • $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}$.

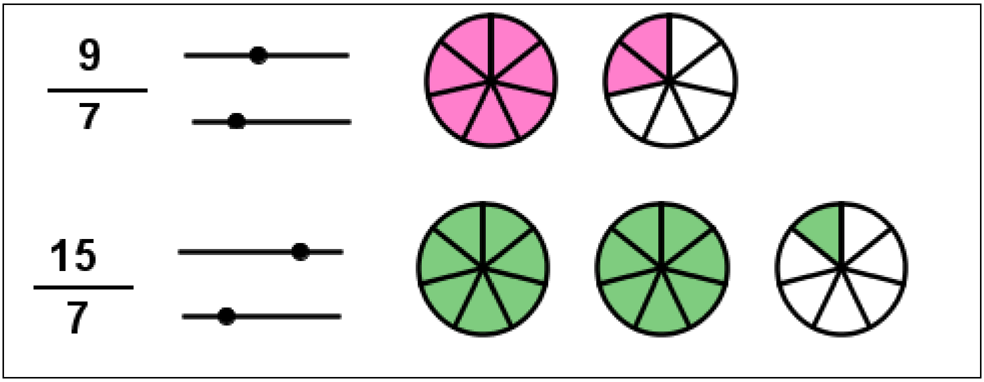


С жълтата точка можеш да местиш зеления квадрат към лилавия.



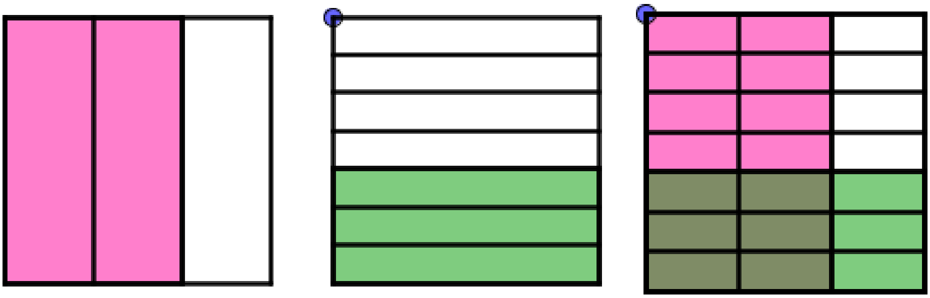
Можеш да местиш кръговете чрез центровете им.

2. Пресметни: • $\frac{9}{7}+\frac{15}{7}$ • $\frac{17}{5}+\frac{19}{5}$ • $\frac{17}{12}+\frac{9}{12}$.



3. Запиши числото 1 като сбор на две обикновени дроби със знаменател:

- 5
- 10.



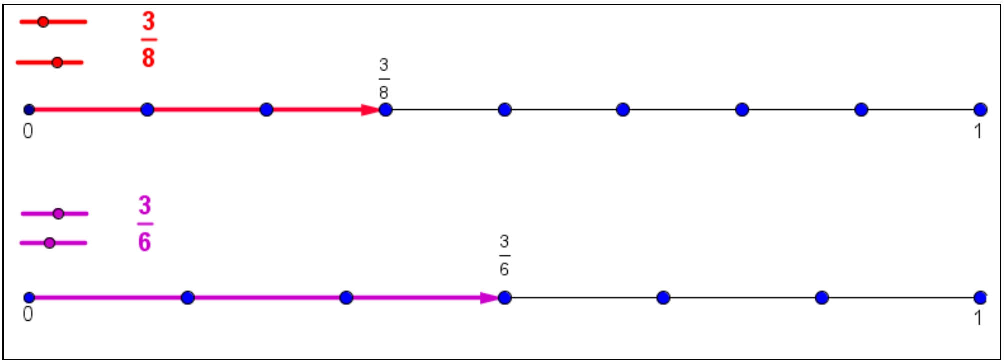
Покажи с модел.

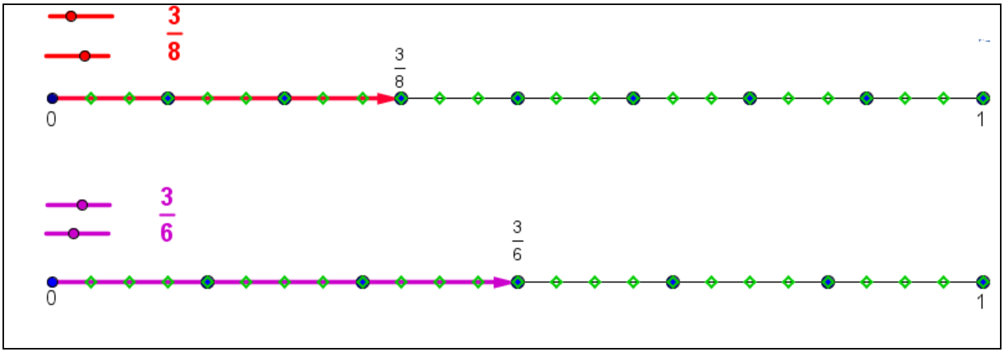
15. Събиране на обикновени дроби с различни знаменатели

И числителят, и знаменателят ми са по-големи от твоите!

Но пак съм по-голяма!

1. Пресметни • $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ • $\frac{2}{5}+\frac{1}{4}$ • $\frac{3}{8}+\frac{2}{5}$.





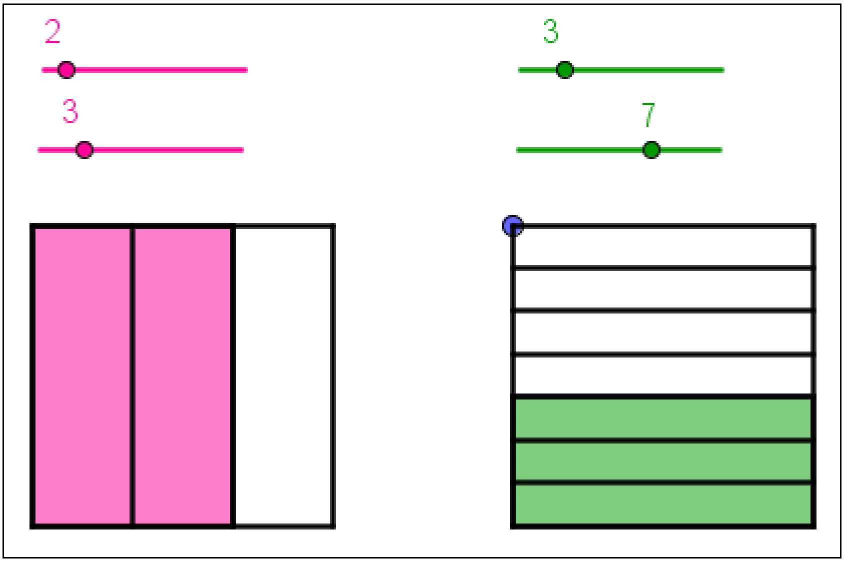
2. Получи и представи с фигура числото 1 като сбор на обикновени дроби с числител 1.

16. Умножение на обикновени дроби

Произведението ни е по-малко от всяка от нас.

А нашето произведение е по-голямо от всяка от нас.

1. Пресметни: • $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{7}$ • $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{7}$ • $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}$.



Премести десния квадрат върху левия и наблюдавай сечението на зелената и лилавата части.

2. Намери лицето на правоъгълник с измерения в дм $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{8}$.

3. Представи като произведение на две обикновени дроби:

• $\frac{10}{12}$ • $\frac{30}{42}$ • $\frac{17}{56}$.

Покажи с модел.

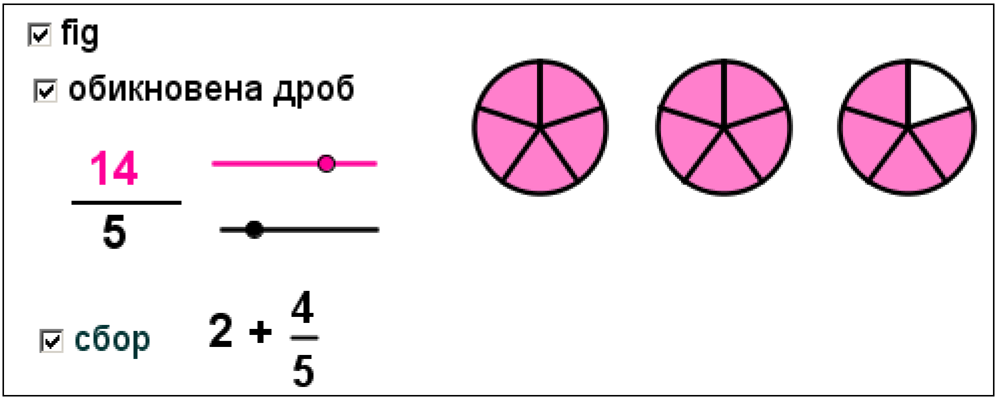
17. Смесени числа

Аз съм произведение на 2 и $\frac{4}{5}$!

А аз съм смесеното число $2\frac{4}{5}$.

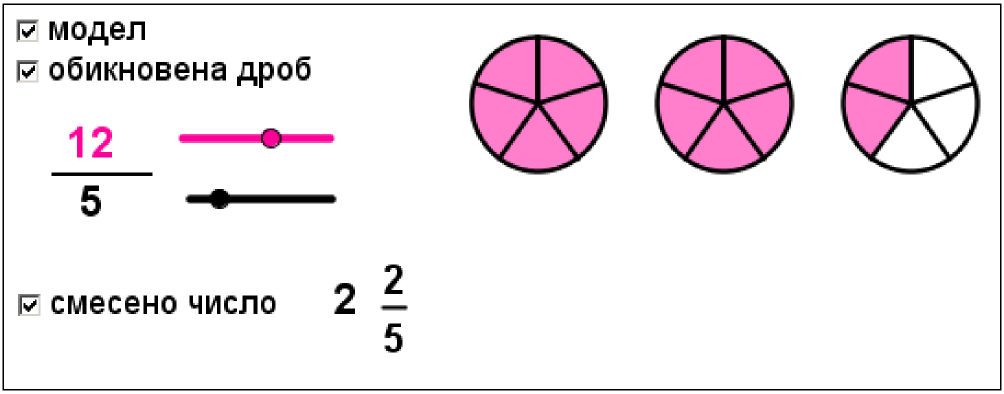
1. Представи неправилната дроб като сбор на цяло число и правилна дроб:

• $\frac{4}{3}$ • $\frac{7}{5}$ • $\frac{19}{4}$ • $\frac{19}{8}$.

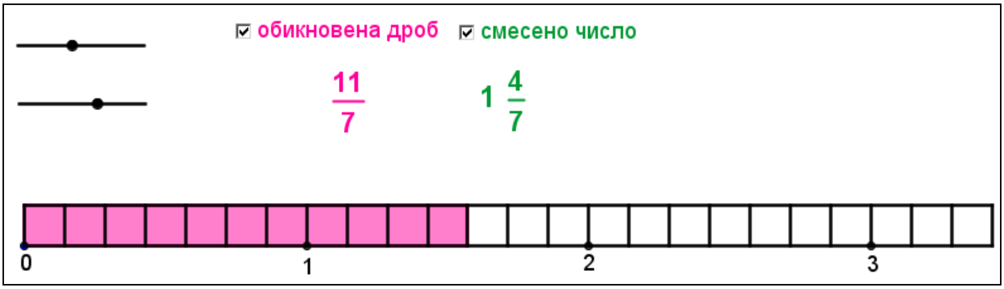


2. Представи:

- неправилните дроби $\frac{12}{11}$ и $\frac{11}{3}$ със смесени числа
- смесените числа $1\frac{3}{8}$ и $2\frac{1}{3}$ с неправилни дроби.



3. Потренирай с превръщания в двете посоки!

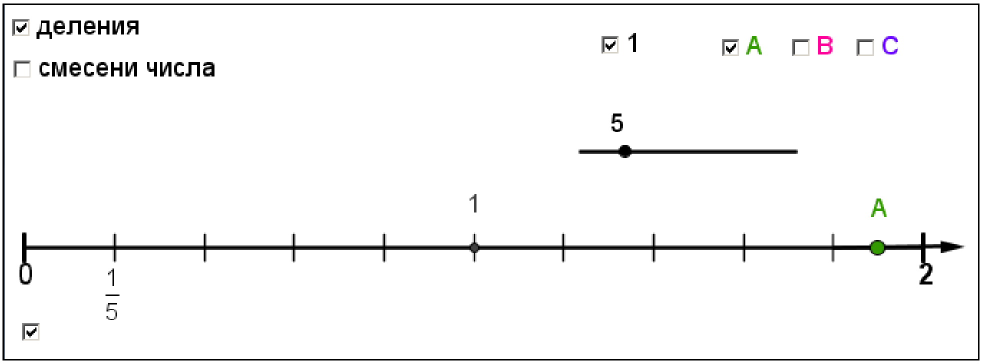


Скрий отговорите и премести плъзгачите за следващ пример.

4. Открий общо правило за сравняване (подреждане) на числа като:

- $\frac{5}{4}$; $\frac{6}{5}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{8}{7}$; $\frac{9}{8}$; $\frac{101}{100}$
- $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{6}{7}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{99}{100}$; $\frac{200}{201}$.

5. Изобрази върху числов лъч $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{5}$; 1; $1\frac{2}{5}$; $1\frac{4}{5}$.



6. Между кои две последователни естествени числа се намира числото:

- $2\frac{1}{7}$
- $15\frac{9}{101}$
- $99\frac{31}{40}$.

7. Попълни със смесено число, че да е вярно:

- $1\frac{3}{7} < \square < 1\frac{4}{7}$
- $4\frac{6}{15} < \square < 4\frac{7}{15}$
- $3\frac{1}{2} < \square < 4\frac{1}{2}$.

18. Египетски дроби

На мен се полага $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}$ от земята.

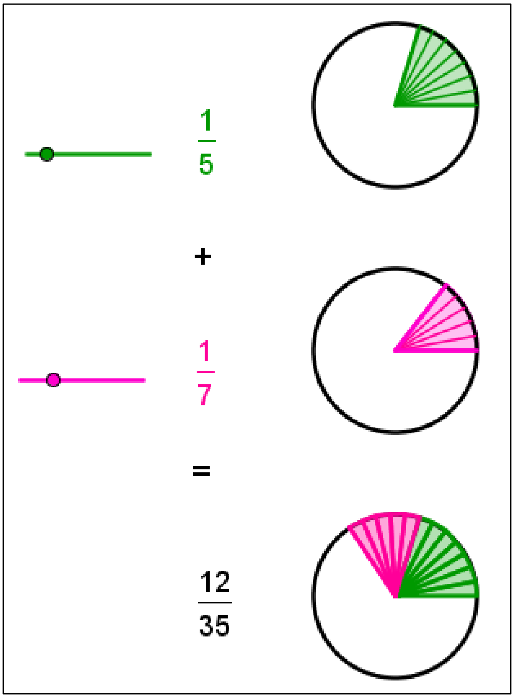
Давам ти и половината от останалото, което според теб се полага на мен.

В Древен Египет са имали символи само за някои обикновени дроби - с числител единица. Останалите обикновени дроби древните египтяни представяли като сбор от различнии дроби с числител единица.

Например $\frac{2}{11}$ представяли като $\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$, но не и като $\frac{1}{11}+\frac{1}{11}$.

1. Представи като древните египтяни, като използваш точно две събираеми:

- $\frac{5}{6}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{7}{12}$; $\frac{11}{18}$; $\frac{18}{77}$
- $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{15}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{6}{35}$; $\frac{7}{24}$
- $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{2}{15}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{7}{13}$
- $\frac{2}{5}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{5}{14}$.



2. Представи като древните египтяни, с повече от две събираеми:

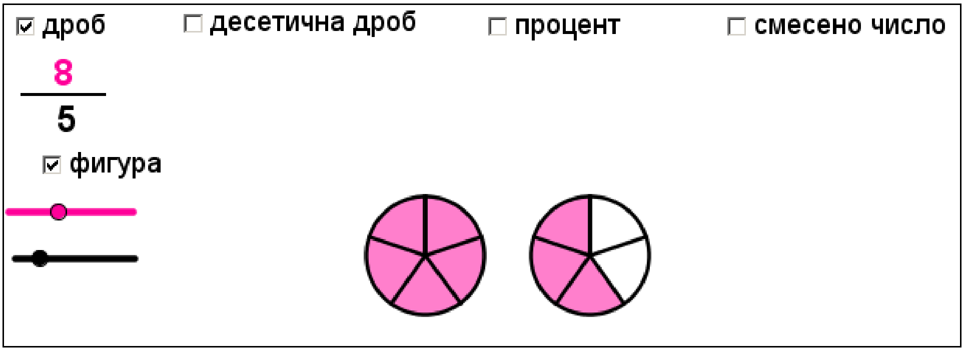
$\frac{4}{5}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{5}{14}$; $\frac{3}{5}$.

19. Връзка между дроби и процент

Тази синя слива е 100% червена!

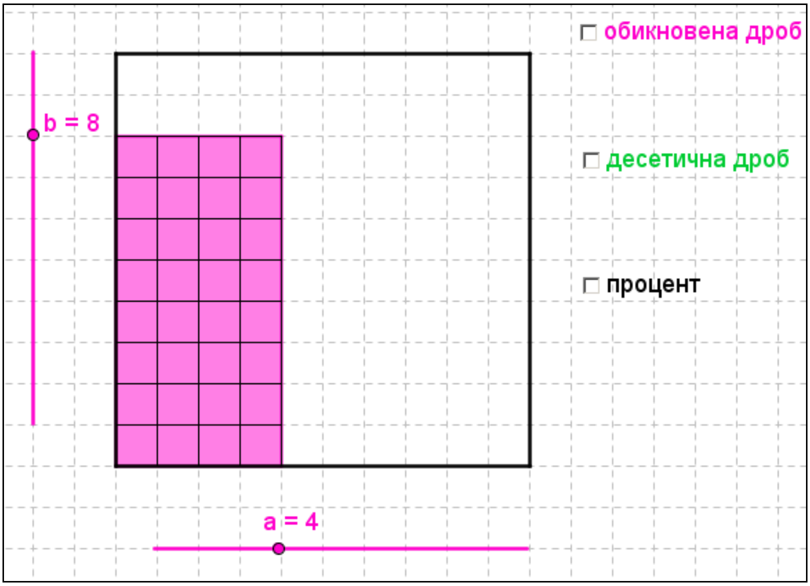
Защото е зелена.

1. Запиши обикновената дроб $\frac{8}{5}$ с десетична дроб и с процент.



За следващ пример мести плъзгачите.

2. Колко процента от квадрата са в лилав цвят?



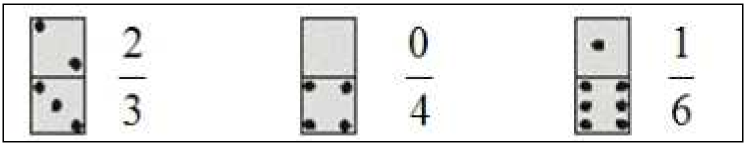
3. Състави задача, като използваш модела.

20. Домино и обикновени дроби

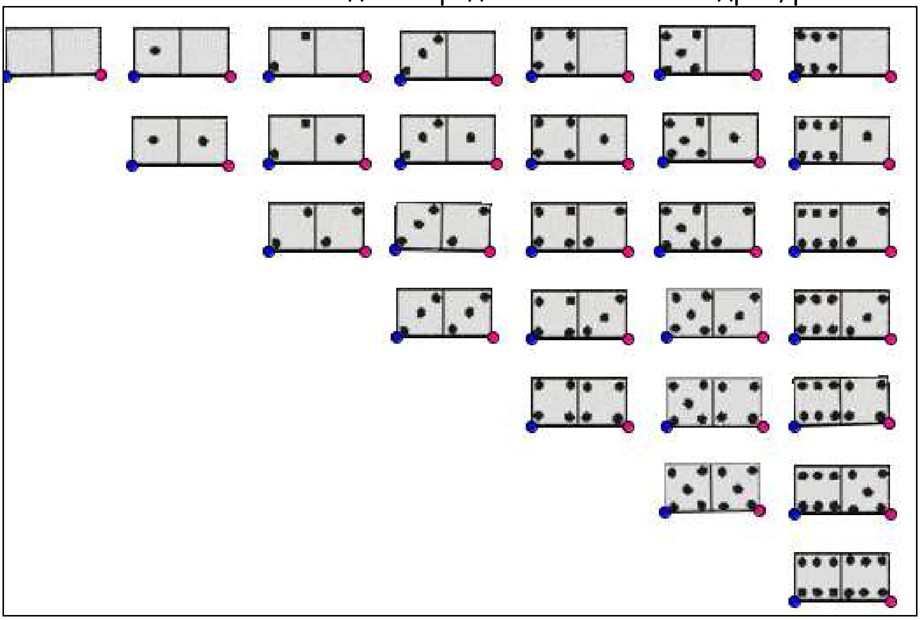
Мога да съм равна на половинка и на две.

А аз – само на 1.

1. Ще използваш плочките от домино за представяне на обикновени дроби. Разделителната черта ще играе роля на дробна черта.

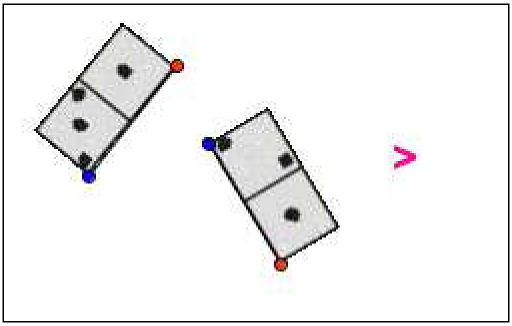


- Коя е най-голямата обикновена дроб, която може да се представи с плочка от домино?
- Има ли плочка, с която не може да се представи обикновена дроб?
- С кои плочки може да се представи неправилна обикновена дроб?
- С кои плочки може да се представи правилна обикновена дроб?
- С колко от плочките може да се представи обикновена дроб, равна на 1.



С червената точка въртиш, а със синята - преместваш плочка.

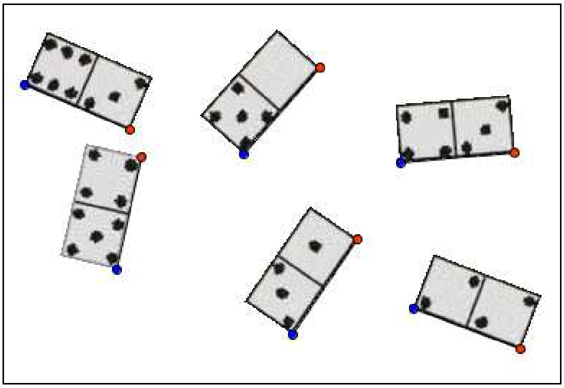
2. Представи с всяка от плочките обикновена дроб и премести така, че да е вярно неравенството.



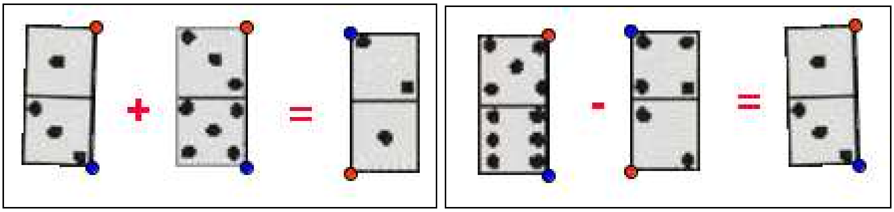
Колко са възможностите?

3. Подреди, като започнеш от:

- най-малката обикновена дроб
- най-голямата обикновена дроб.



4. Една от плочките е поставена неправилно. Обърни я, за да получиш вярно равенство с обикновени дроби.



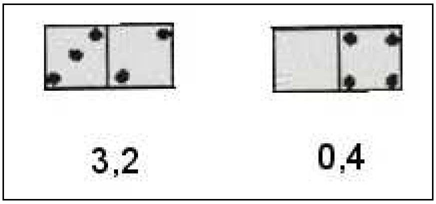
Състави задачи с домино и обикновени дроби.

21. Домино и десетични дроби

Мога да съм равна на половинка и на пет.

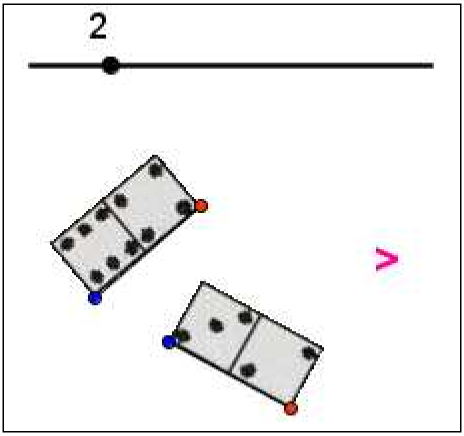
А аз – само на 0.

1. Ще използваш плочките от домино за представяне на десетични дроби. Разделителната черта ще играе роля на десетична запетая.



- Коя е най-голямата десетична дроб, която може да се представи с плочка от домино?
- Има ли плочка, с която не може да се представи десетична дроб?
- С колко от плочките могат да се представят две различни десетични дроби?

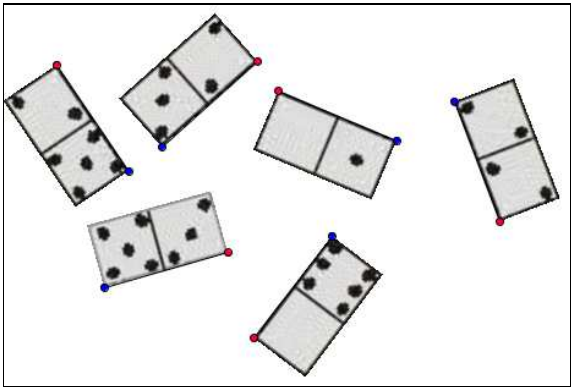
2. Представи с всяка от плочките десетични дроби и премести така, че да е вярно неравенството. Колко са възможностите?



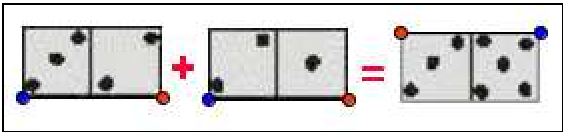
Мести плъзгача за следващ пример.

3. Подреди, като започнеш от:

- най-малката десетична дроб
- най-голямата десетична дроб.



4. Една от плочките е поставена неправилно. Обърни я, за да получиш вярно равенство с десетични дроби.



5. Подреди три плочки от домино така, че средната да е средноаритметично на крайните.

Състави задача с десетични дроби, представени с домино.

22. Домино и дробни числа

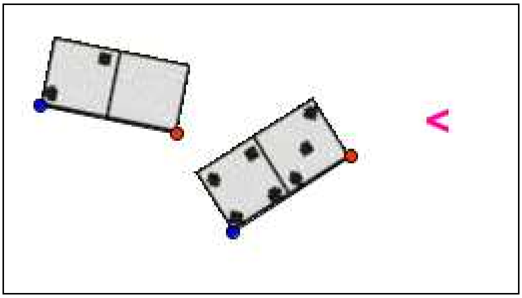
Мога да съм равна и на нула, и на едно.

Няма по-голяма от мен сред Вас!

1. Ще използваш плочките от домино за представяне на обикновени и десетични дроби.

- Кое е най-голямото дробно число, което може да се представи с плочка?
- С колко от плочките може да се представи дробно число, равно на:
  - 0,5
  - 1
  - 0?

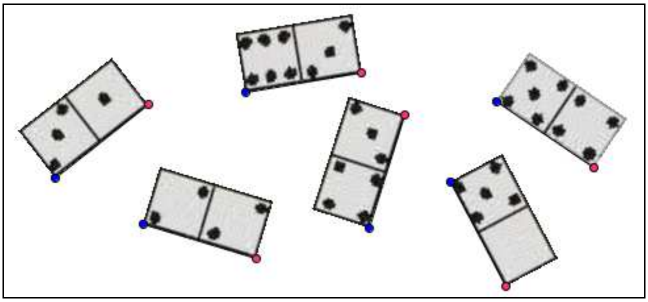
2. Представи с всяка от плочките дробно число и премести така, че да е вярно неравенството.



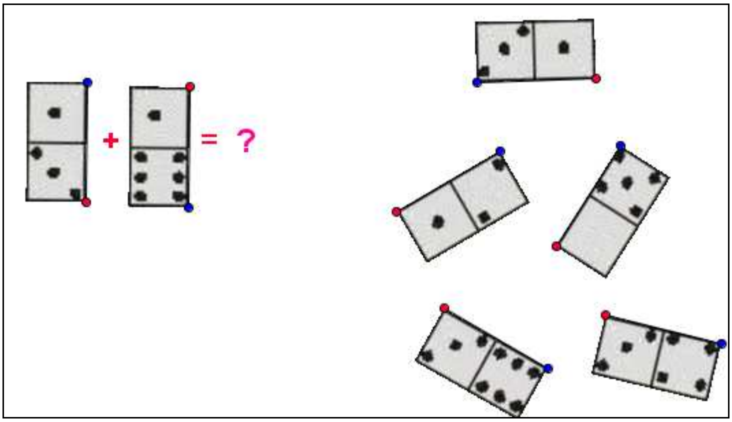
Колко са възможностите?

3. Подреди, като започнеш от:

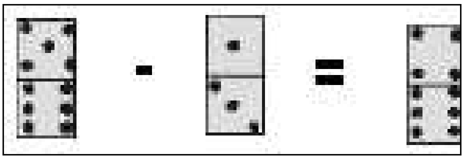
- най-малкото дробно число
- най-голямото дробно число.



4. С колко от плочките вдясно може да се замени въпросителният знак, че да се получи вярно равенство?



5. Замени една от плочките на домино с друга така, че да получиш вярно числово равенство.



6. Подреди три плочки от домино така, че средното дробно число да е средноаритметично на крайните.

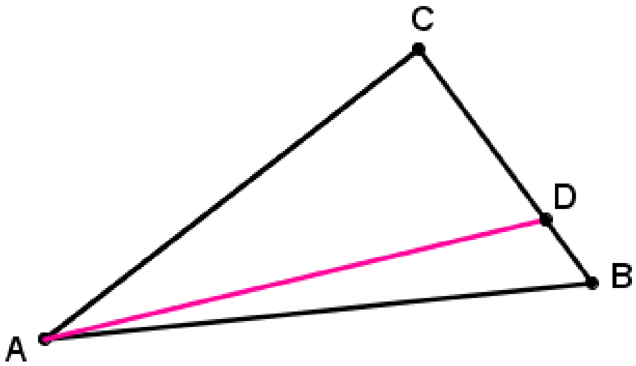
Състави задача с дробни числа, представени с домино.

23. Чевиани

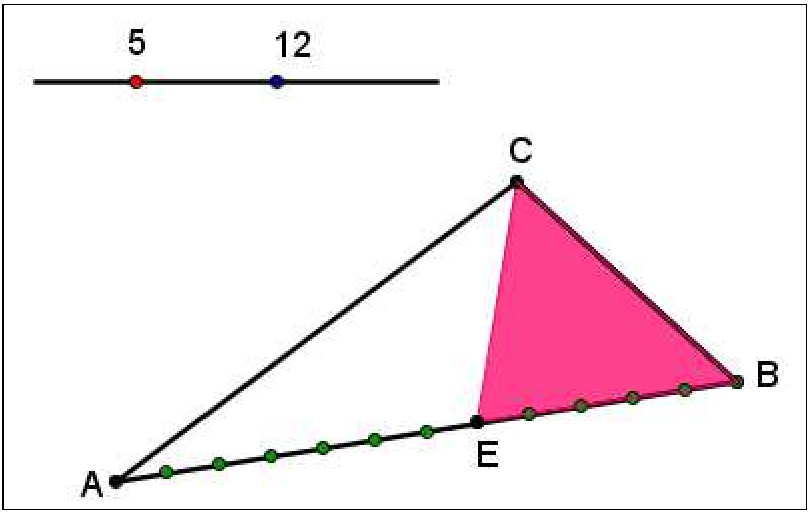
Моята чевиана е медиана!

И двете ми чевиани са медиани.

Отсечка, която свързва връх на триъгълник с произволна точка от срещуположната му страна, се нарича **чевиана.**

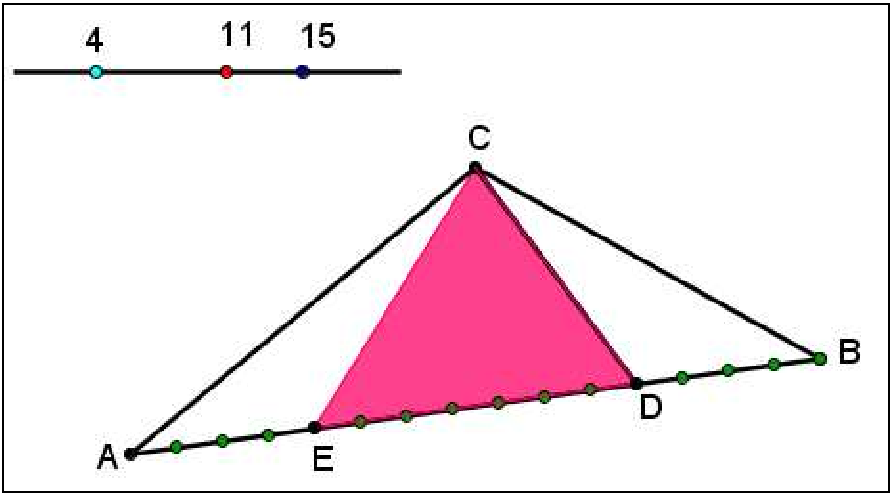


1. Каква част от площта на триъгълника *ABC* е лилава?



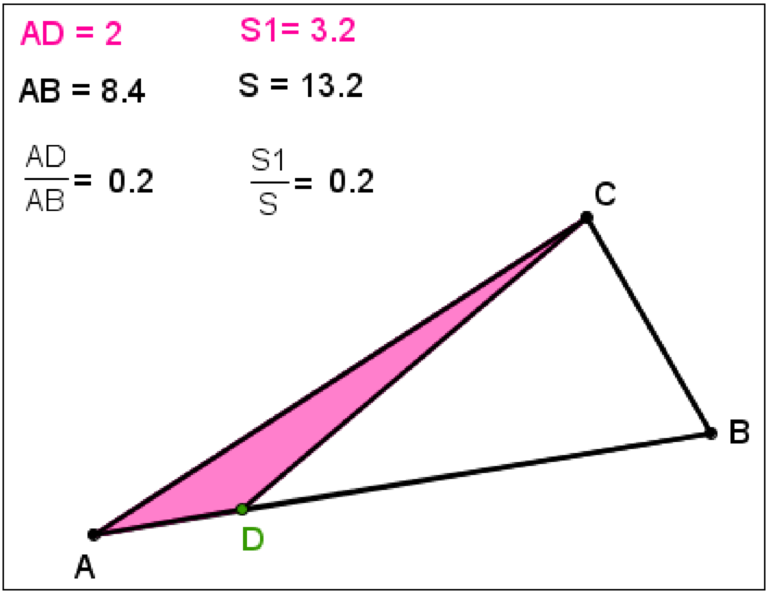
Мести плъзгачи за следващ пример. Опиши с думи алгоритъм за решаване.

2. Каква част от площта на триъгълника *ABC* е лилава?



Мести плъзгачи за следващ пример. Опиши с думи алгоритъм за решаване.

3. Каква част от площта на триъгълника *ABC* е лилава?

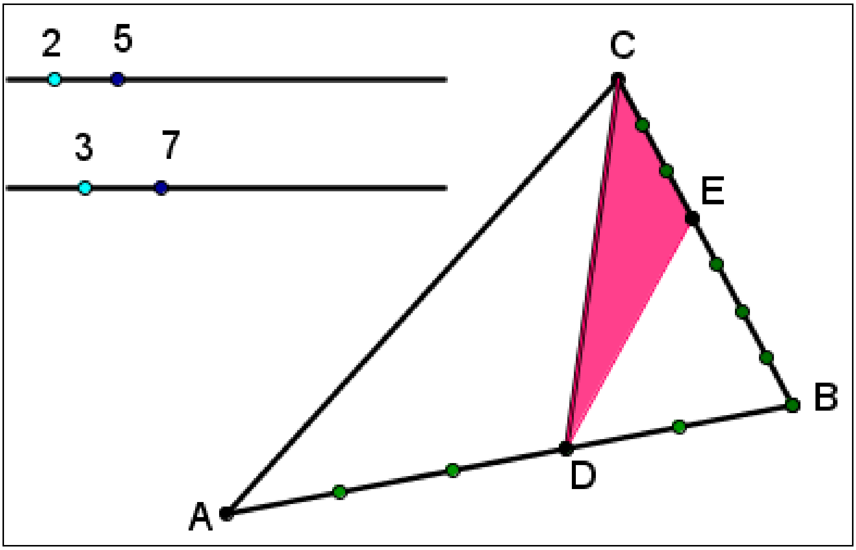


24. Част от триъгълник

Моите чевиани ме делят на три равнолицеви части.

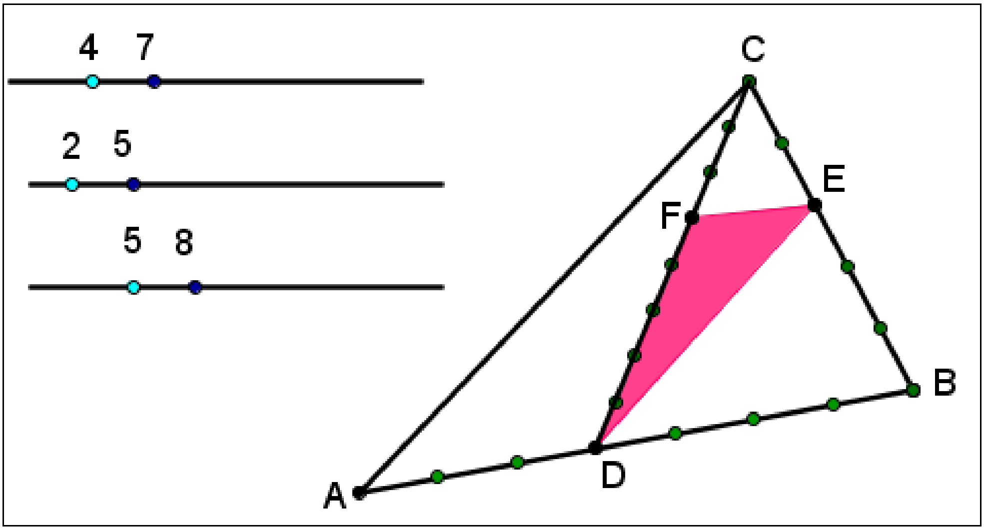
А моята чевиана отсича четвъртинка от площта ми.

1. Каква част от площта на триъгълника *ABC* е лилава?

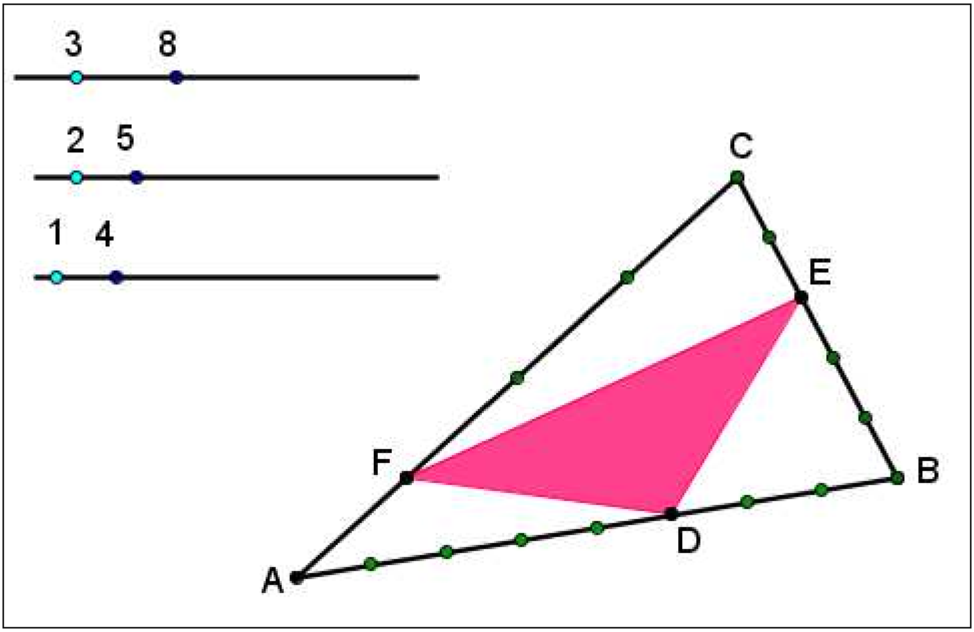


Мести плъзгачи за следващ пример. Опиши с думи алгоритъм за решаване.

2. Каква част от площта на триъгълника ABC е лилава?



3. Каква част от площта на триъгълника ABC е лилава?



Мести плъзгачи за следващ пример. Опиши с думи алгоритъм за решаване.

4. Състави задачи с моделите.

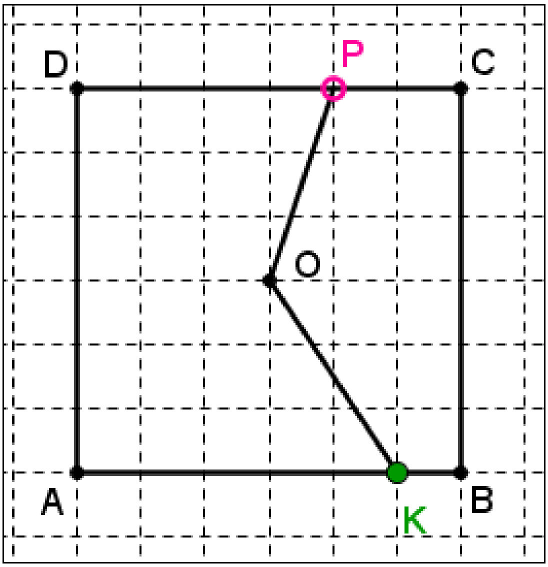
25. Равнолицеви части на квадрат

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

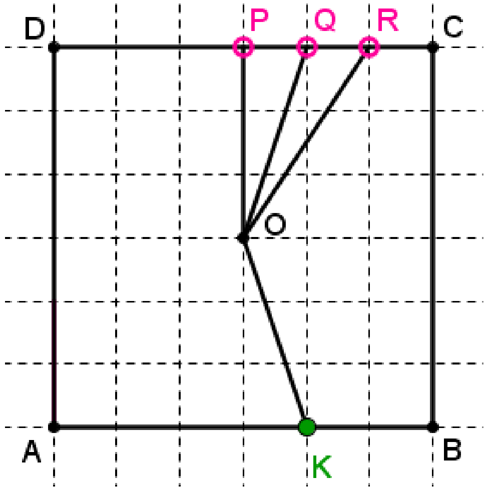
Точка O е център на квадрата ABCD.

1. Премести точка P така, че квадратът ABCD да се раздели на две равнолицеви части.

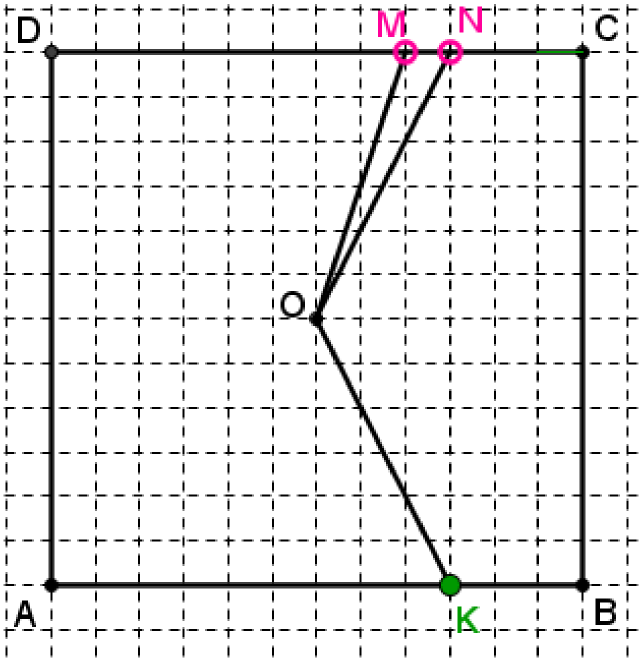


Премести точка K за следващ пример. Направи хипотеза. Обоснови.

2. Премести точките P, Q и R така, че квадратът ABCD да се раздели на четири равнолицеви части.

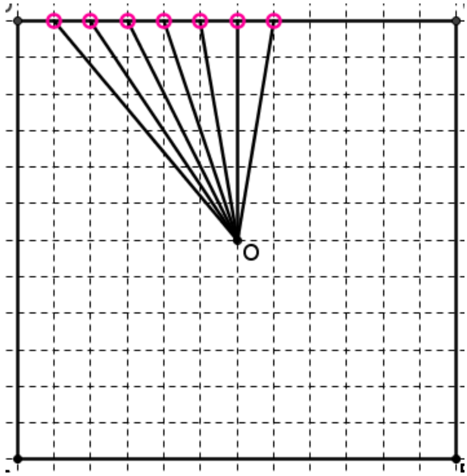


3. Премести точките M и N така, че квадратът ABCD да се раздели на три равнолицеви части.



4. Представи квадрата като обединение на части:

- $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}$
- $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}$
- $\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{5}{12}$.

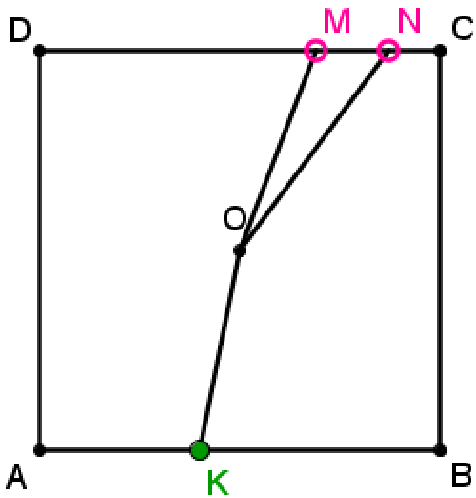


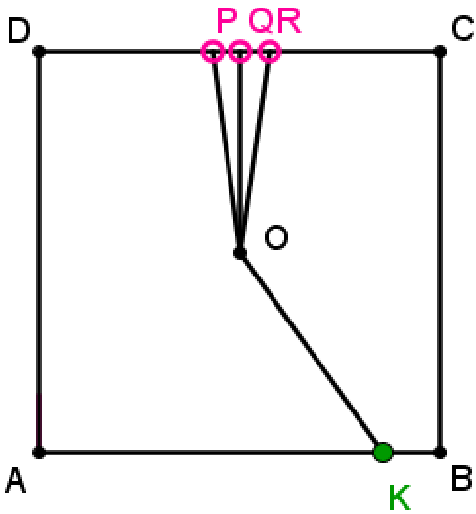
Можеш да скриеш точки (отсечки), като ги поставиш върху други.

Представи 1 като сбор на обикновени дроби и изобрази с модела горе.

При необходимост построй нови точки или промени размера на квадрата.

5. Използвай наученото и потренирай без квадратна мрежа с половинка, четвъртинка, третинка.





Използвай наученото и отбележи осминка, шестинка, дванайсетинка.

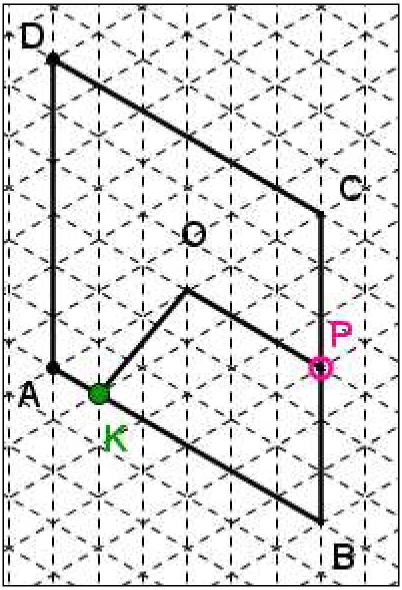
26. Равнолицеви части на ромб

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

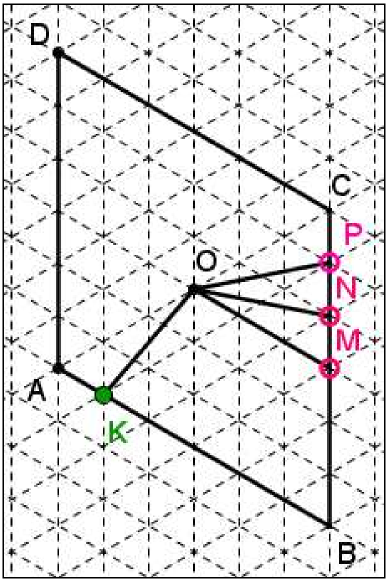
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

Точка O е център на ромба ABCD.

1. Премести точка P така, че ромбът ABCD да се раздели на две равнолицеви части.

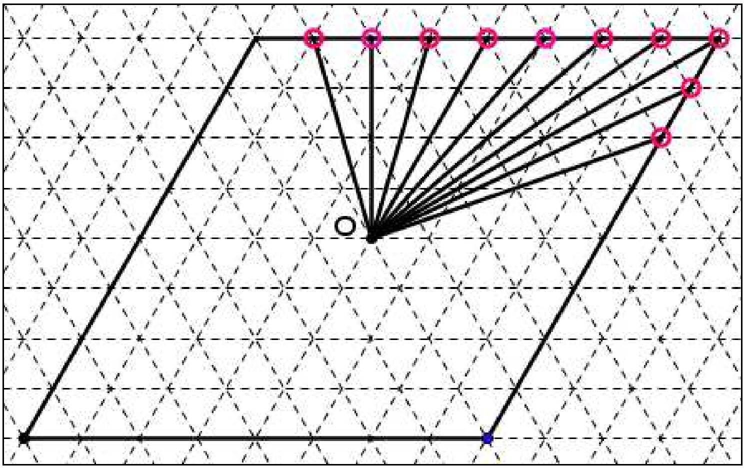


2. Премести точките P, M и N така, че ромбът ABCD да се раздели на четири равнолицеви части.



3. Представи ромба като обединение на части:

- $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}$ • $\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{5}{12}$



Можеш да скриеш точки (отсечки), като ги поставиш върху други.
Представи 1 като сбор на обикновени дроби и изобрази с модела горе.

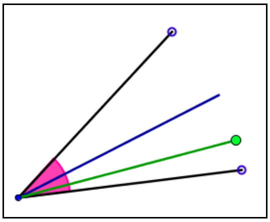
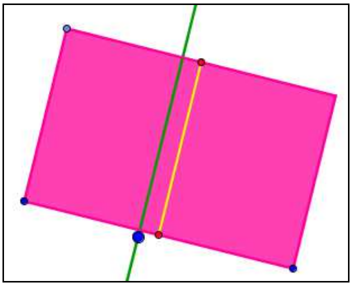
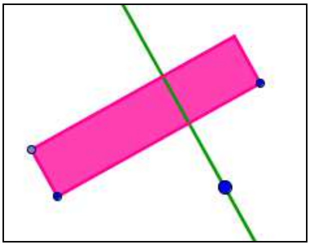
При необходимост промени размера на ромба.

Към учителите

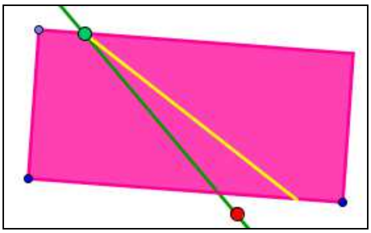
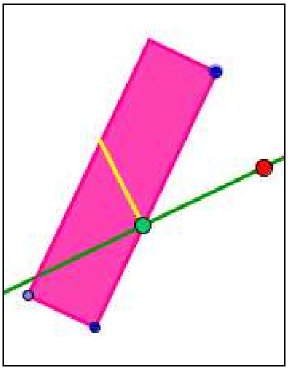
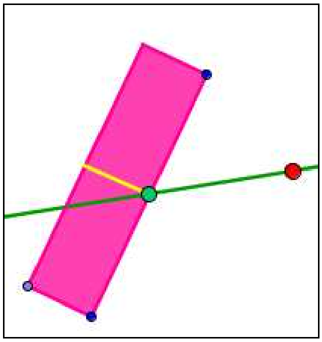
В края на работата по всяка от темите учениците допълват комиксите с фигури.

1

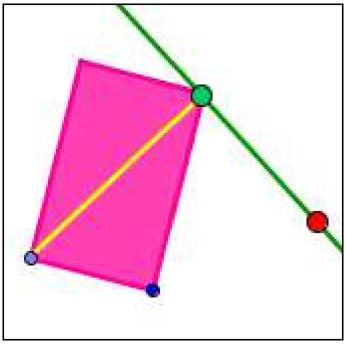
С решаването на задачите тук се осигурява разбирането на *половинка*, както и се развива окомера, което е важно за развитие на интуицията.

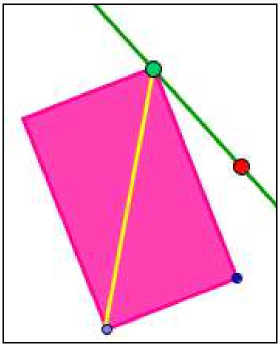




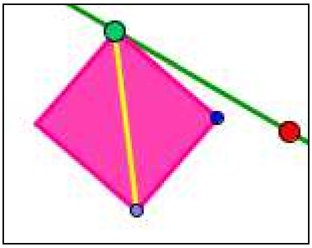
Задачите могат да се използват за самопроверка. В час е подходящо ученик, след като реши задача, да генерира пример за следващия ученик. Ако решаването се организира като състезание, всеки ще се стреми да постави на следващия по-сложен пример, а това развива и други качества и умения.

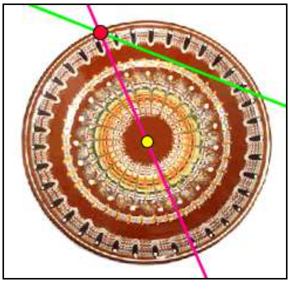
При показан отговор на задача 4. е подходящо учениците да поиграят с правата, т.е. да местят зелената точка при фиксиран правоъгълник. Очакваме да забележат, че „отговорът" винаги минава през центъра на правоъгълника. Може да се изследва кога правата е успоредна на някоя от страните или се постави задачата обратно – какво се получава, когато зелената точка е среда на страна или връх на правоъгълника. Точно динамичността осигурява възможност при фиксиране на зелената точка във връх учениците да наблюдават резултатите за различни правоъгълници.





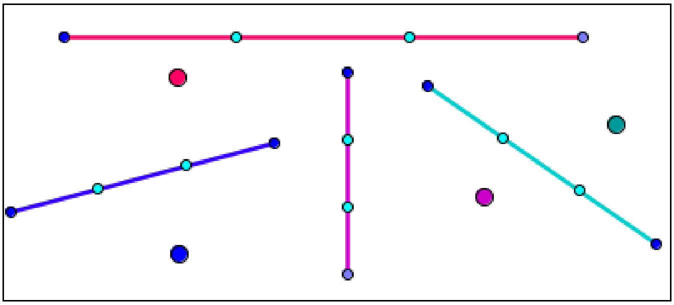


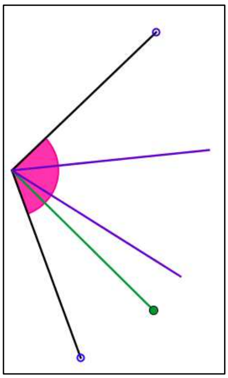
Към формулиране на хипотеза са насоките в задача 5. Очакваме учениците да установят, че всяка права, която разделя чинията на две половинки, минава през центъра на окръжността. Понякога се формулира обратното твърдение и е подходящо изказването в двете посоки.



2.

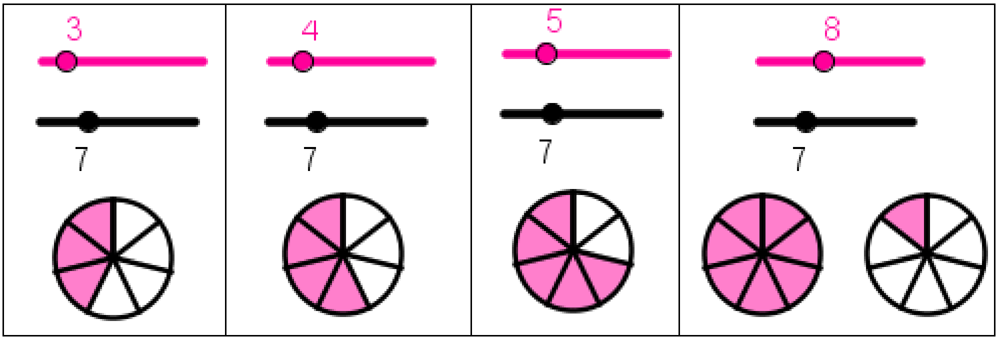
Работи се аналогично на задачите с половинка. Особеност са броя на решенията:

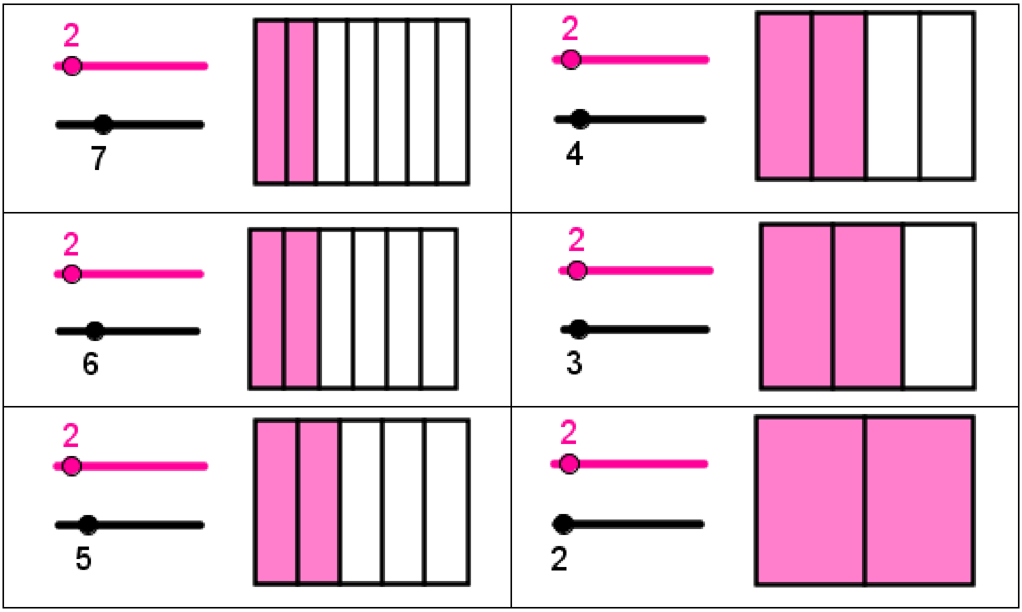




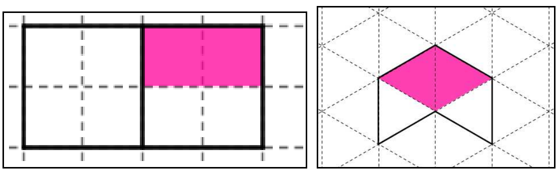
4

Важно е учениците да усетят изменението на дробта при увеличаване (намаляване) на числителя при постоянен знаменател и на знаменателя при постоянен числител.

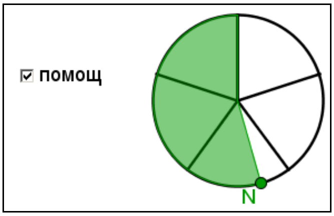


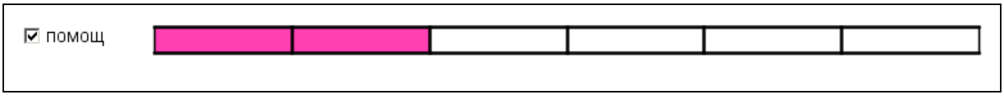


Като помощно средство в задача 2. се използва квадратна (триъгълна) мрежа.



Като помощ в задачите се предлага разделяне на фигурата на необходимия брой равни части.

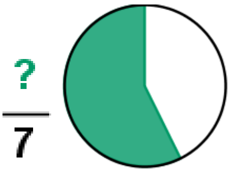




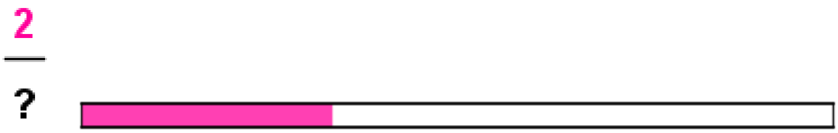
Тези задачи е подходящо да се решават както тук, за развитие на окомера, така и след теми като основно свойство на обикновените дроби, сравняване, събиране и изваждане на обикновени дроби. Така ще се използват и обсъждат различни стратегии за решаване, ще се съчетават знания и визуална ориентация за справяне с проблем, ще се формира умение за приблизителна оценка.

Например:

- Тук могат да съобразят, че е оцветена молко повече от половинката, следователно числителят е 4.



- Тук могат и да съобразят, че е оцветена третинка от правоъгълника и тъй като числителят е 2, знаменателят трябва да е равен на 6. А могат да разделят мислено оцветената част на 2, за да определят едната част и реценят колко пъти се нанася в целия правоъгълник.

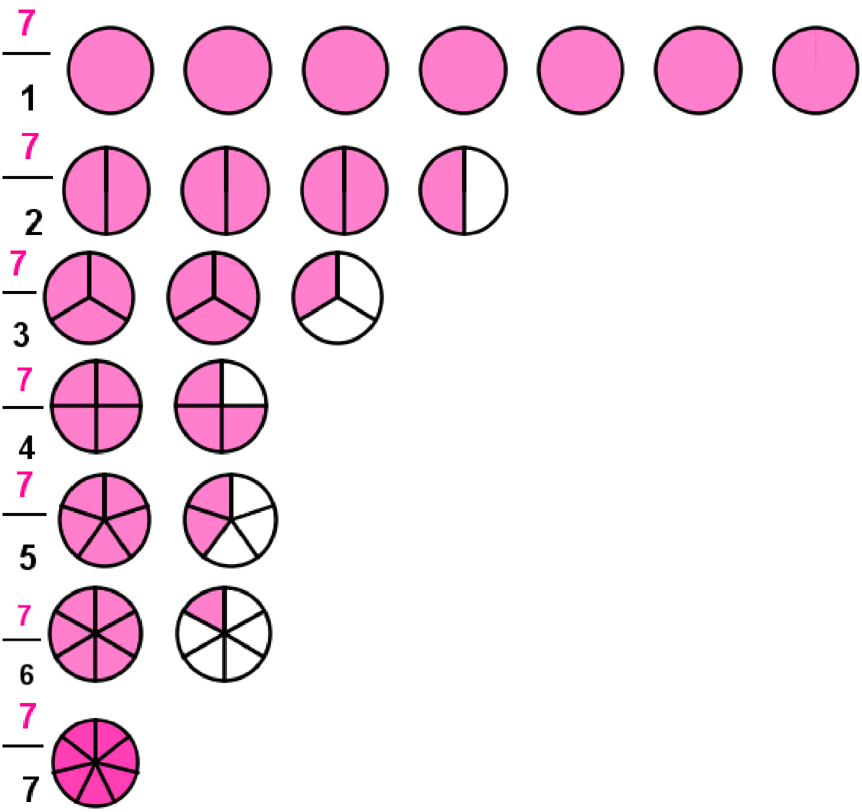


- Тук могат да съобразят, че ако знаменателят беше 8, трябваше да е оцветен половината кръг, ако знаменателят беше 6, трябваше да са оцветени $\frac{2}{3}$ от кръга. Следователно знаменателят е 7.

$\frac{4}{?}$

7

При решаване на задача 2 за записване на неправилните дроби с числител 7 последователно могат да наблюдават:

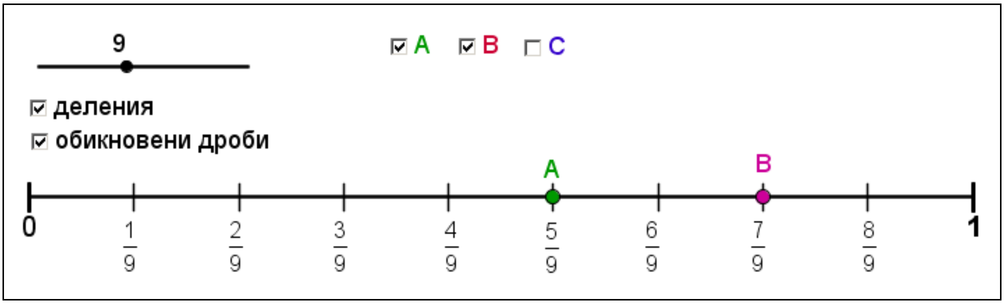


8

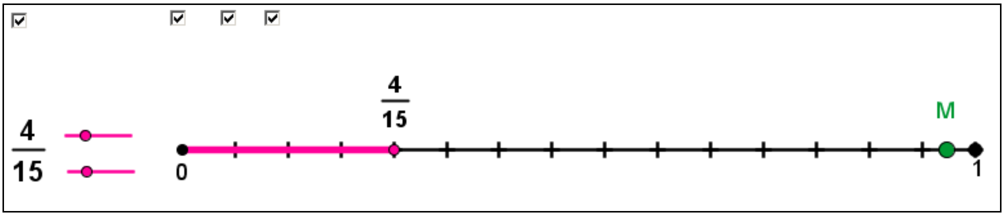
Учениците вече имат опит и лесно стигат до хипотези. При това хипотезите се изказват и в двете посоки от различни ученици. Тук трябва да се обърне внимание върху симетричността на равенството. Често ще се налага да се използва представянето на числото 1 като обикновена дроб с равни числител и знаменател. Затова е целесъобразно да се отделят твърденията и в двете посоки:

- Когато числителят и знаменателят са равни, обикновената дроб е равна на 1.
- Числото 1 може да се запише като обикновена дроб, на която числителят и знаменателят са равни.
- Всяко естествено число може да се запише като обикновена дроб със знаменател 1.
- Всяка обикновена дроб със знаменател 1 може да се запише с естествено число.

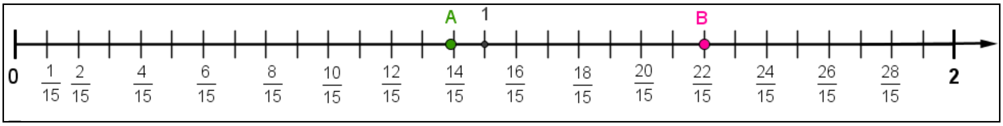
В задача 1 се работи с правилни дроби, като с плъзгач се осигурява разделяне на равни части на отсечката с краища образите на 0 и 1.

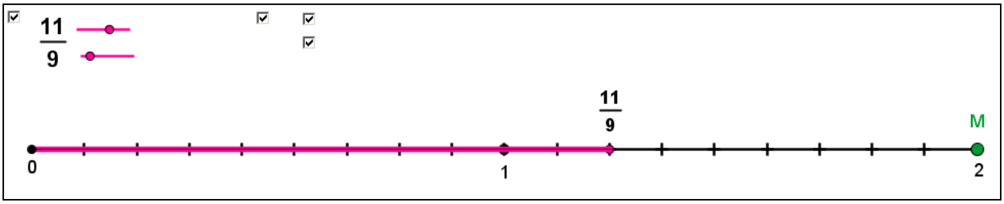


Включен е и аплет за тренировка в двете посоки – предварително може да се скрие дробта или изобразяването ѝ върху числовия лъч.



Аналогично се работи със следващите два аплета при изобразяване върху числов лъч на обикновени дроби, по-малки от 2.



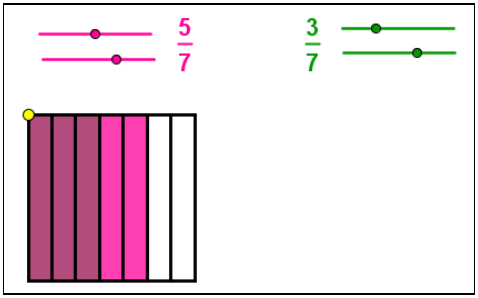


С тези аплети могат да се генерират задачи.

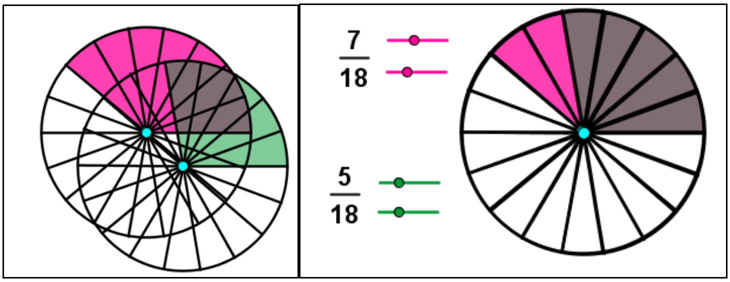
10

Представени са възможности за експериментиране с обикновени дроби:

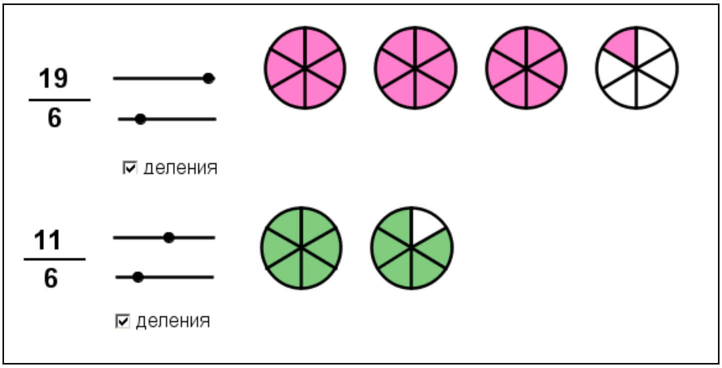
- не по-големи от 1 със знаменател до 10.



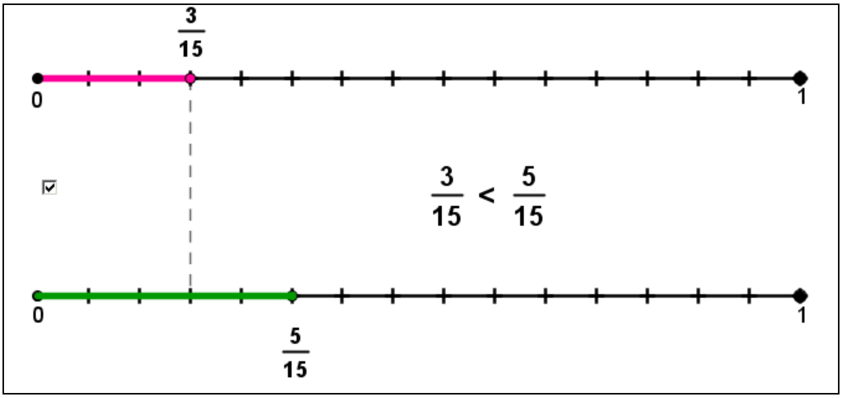
- не по-големи от 1 със знаменател до 50.



- с ограничение за числителя и знаменателя 20

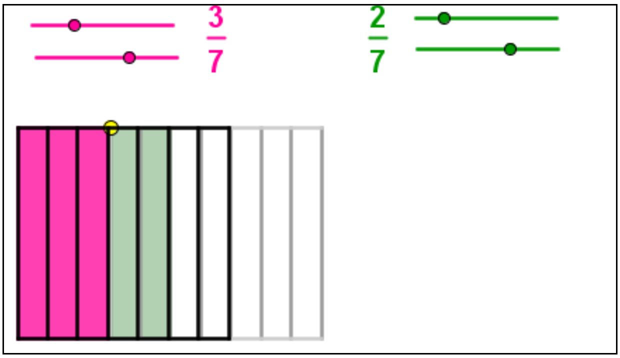


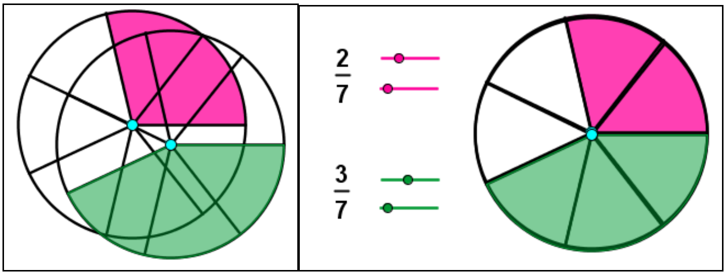
- не по-големи от 1 със знаменател до 50.



14

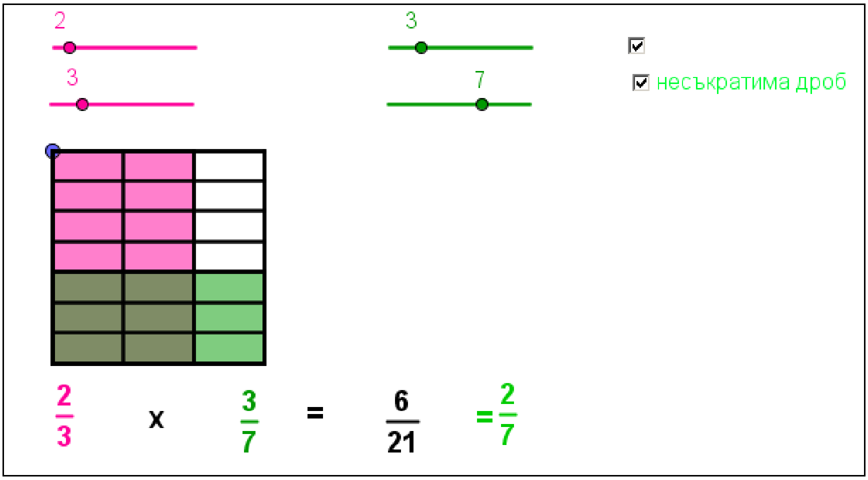
И тук са представени аплети за експериментиране с някои ограничения за дробите. За разлика от сравняването, тук трябва да се доближат оцветените части и разглежда обединението.





16

Тук произведението на две обикновени дроби се представя като сечение.



18

Обикновено учениците с усилие извършват изчисления с обикновени дроби, особено ако се изучават след десетични дроби. Могат да бъдат мотивирани с факта, че древни египтяни с лекота се справяли със сложни изчисления с обикновени дроби, въпреки използването само на такива с числител 1. Ще отележим, че в някои източници има символ и за $\frac{2}{3}$, което не променя ситуацията. На базата на няколко примера учениците могат да стигнат до общо правило за решаване, а именно представянене на числителя като сбор с подходящи събираеми.

$$\frac{5}{6}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3};\quad \frac{7}{10}=\frac{2}{10}+\frac{5}{10}=\frac{1}{5}+\frac{1}{2};\quad \frac{7}{12}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4};\quad \frac{11}{18}=\frac{9}{18}+\frac{2}{18}=\frac{1}{2}+\frac{1}{9}$$

$$\frac{3}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4};\quad \frac{4}{15}=\frac{1}{15}+\frac{3}{15}=\frac{1}{15}+\frac{1}{5};\quad \frac{5}{12}=\frac{2}{12}+\frac{3}{12}=\frac{1}{6}+\frac{1}{4};\quad \frac{6}{35}=\frac{1}{35}+\frac{5}{35}=\frac{1}{35}+\frac{1}{7}$$

В някои случаи се разширява дадената обикновена дроб:

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{1}{6}+\frac{3}{6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{2};\quad \frac{3}{7}=\frac{6}{14}=\frac{1}{15}+\frac{3}{15}=\frac{1}{15}+\frac{1}{5}$$

$$\frac{2}{15}=\frac{4}{30}=\frac{1}{30}+\frac{3}{30}=\frac{1}{30}+\frac{1}{10};\quad \frac{5}{9}=\frac{10}{18}=\frac{1}{18}+\frac{9}{18}=\frac{1}{18}+\frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{5}=\frac{4}{10}=\frac{6}{15}=\frac{1}{15}+\frac{5}{15}=\frac{1}{15}+\frac{1}{3};\quad \frac{2}{7}=\frac{4}{14}=\frac{6}{21}=\frac{8}{28}=\frac{1}{28}+\frac{7}{28}=\frac{1}{28}+\frac{1}{4}$$

$$\frac{5}{14}=\frac{10}{28}=\frac{15}{42}=\frac{1}{42}+\frac{14}{42}=\frac{1}{42}+\frac{1}{3}.$$

Понякога лесно се достига до повече от едно решение:

$$\frac{5}{12}=\frac{2}{12}+\frac{3}{12}=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\quad \text{или}\quad \frac{5}{12}=\frac{1}{12}+\frac{4}{12}=\frac{1}{12}+\frac{1}{3}$$

$$\frac{4}{15}=\frac{1}{15}+\frac{3}{15}=\frac{1}{15}+\frac{1}{5}\quad \text{или}\quad \frac{4}{15}=\frac{8}{30}=\frac{3}{30}+\frac{5}{30}=\frac{1}{10}+\frac{1}{6}$$

$$\frac{6}{35}=\frac{1}{35}+\frac{5}{35}=\frac{1}{35}+\frac{1}{7}\quad \text{или}\quad \frac{6}{35}=\frac{12}{70}=\frac{7}{70}+\frac{5}{70}=\frac{1}{10}+\frac{1}{14}.$$

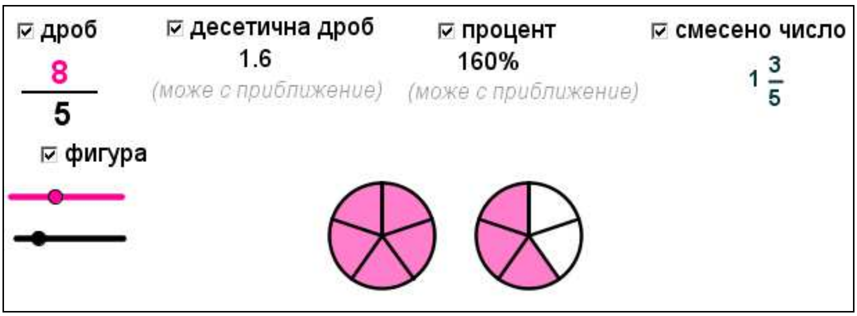
А още по-лесно е представяне като сбор на повече от две събираеми:

$$\frac{4}{5}=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{1}{5}+\frac{6}{10}=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{5}{10}=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\quad \text{или}$$

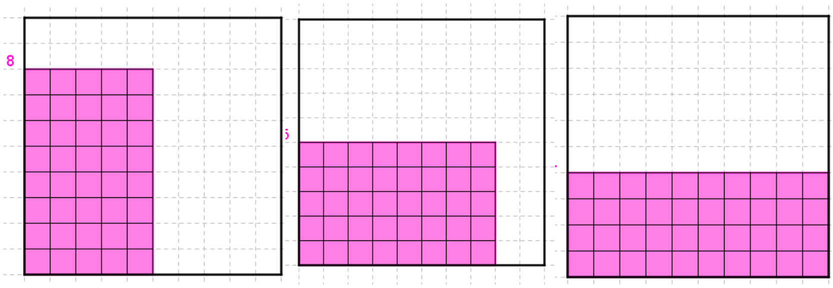
$$\frac{4}{5}=\frac{16}{20}=\frac{1+5+10}{20}=\frac{1}{20}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}.$$

19

Учениците трябва да се насочват към разнообразно използване на аплетите и изследване на различни (по възможност всички) възможности за реализиране на условие.

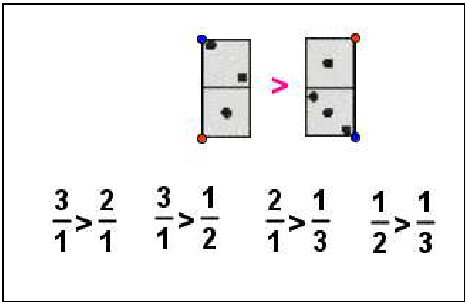


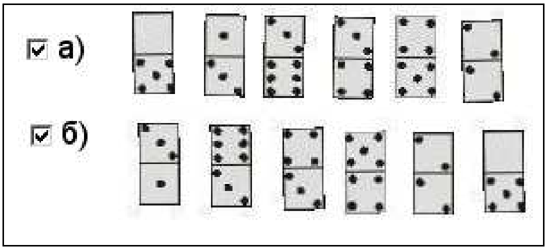
Например, да открият по колко начина с модела може да се оцветят 40%. В процеса на решаване акцент се поставя върху симетрия или върху делимостта, с които често се опростават изследванията.



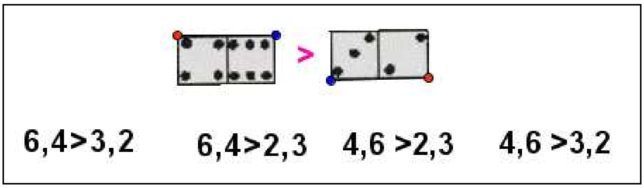
20

Може да се работи паралелно и с материални плочки от домино. Учениците трябва да се насочват към пълнота на решението на задачите.



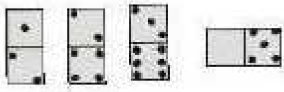


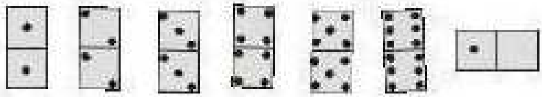
21



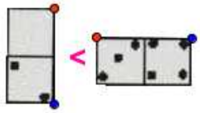
22

Това са представянията на $\frac{1}{2}$ и 1 с плочки от домино.

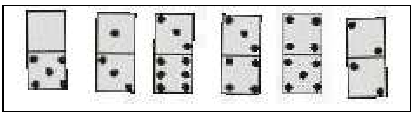


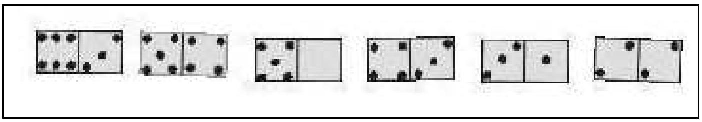


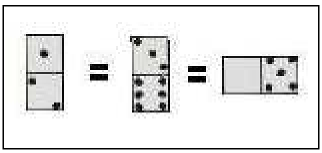
Ето и решения на следващите задачи:



$\frac{0}{2}<\frac{4}{3}$	$\frac{0}{2}<\frac{3}{4}$	$\frac{0}{2}<3,4$	$\frac{0}{2}<4,3$
$0,2<3,4$	$0,2<4,3$	$0,2<\frac{4}{3}$	$0,2<\frac{3}{4}$
$2,0<4,3$	$2,0<3,4$	$\frac{3}{4}<2,0$	$\frac{4}{3}<2,0$

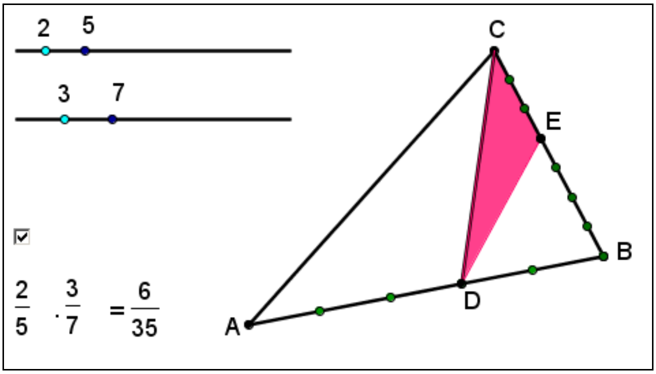




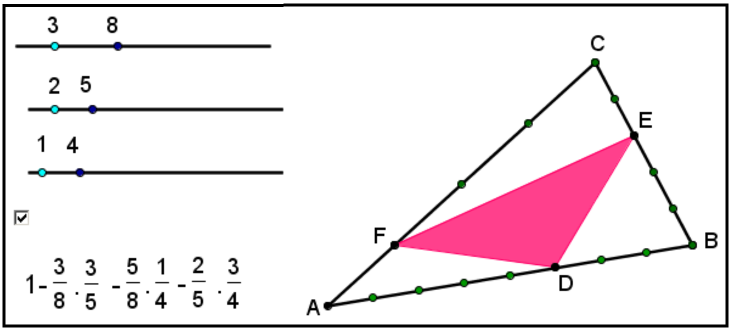


24

След няколко примера учениците трябва да открият на общ начин за решаване. Аплетите могат да се използват за решаване и на обратната задача – за оцветяване на дадена част от триъгълник и откриват различни решения.

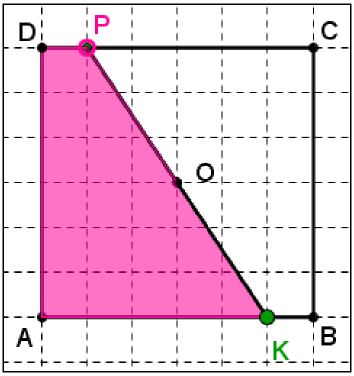


Тук трябва да се досетят, че оцветената част ще се намери като разлика и използват три пъти открития начин за решаване на предната задача.

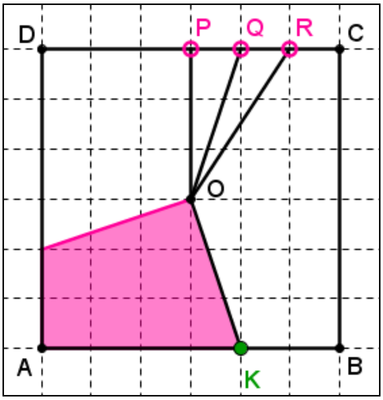


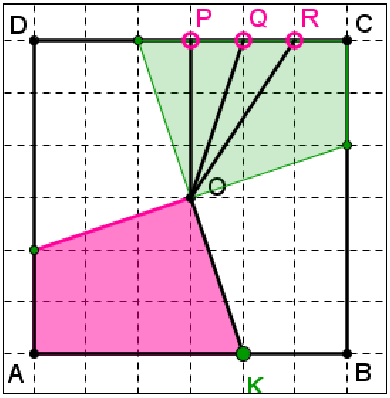
25

Ще припомним, че в първите теми учениците разделяха правоъгълник на две равни части с права и установиха, че правата винаги минава през центъра на правоъгълника. Тук се използват отсечки, единият край на които е центъра O на квадрата, а другият – върху контура му. Очаква се да съобразят, че разстоянието от O до всяка от страните на квадрата е едно и също и това разстояние е равно на дължините на височините в получаваните триъгълници (с два върха върху контура на квадрата и трети връх – точката O).



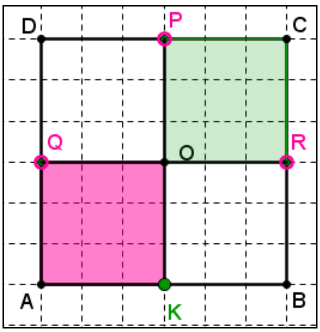
Отговорите могат да бъдат свързани с равенство на отсечките АК и СР; с получаване на търсеното място на Р като пресечна точка на КО и квадрата; с дължина на начупената линия КВСР, равна на полуобиколката на квадрата.

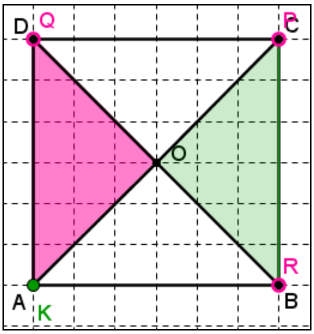




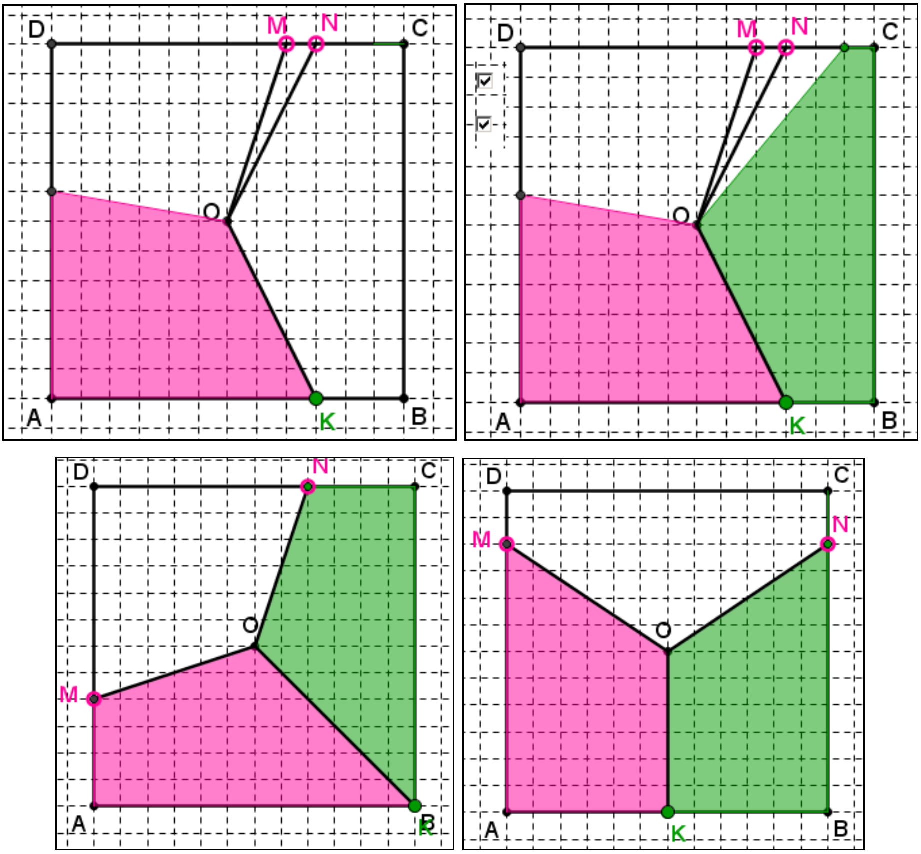
При разделянето на четири части, освен аналогичните на горните хипотези, учениците се очаква да забележат, че разделянето се осъществява с две перпендикулярни прави.

Учениците могат да се насочат към разглеждане на частни случаи и откриване на особености.

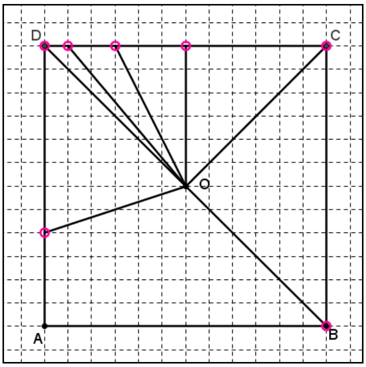




Аналогично се действа и при разделянето на три равнолицеви части.



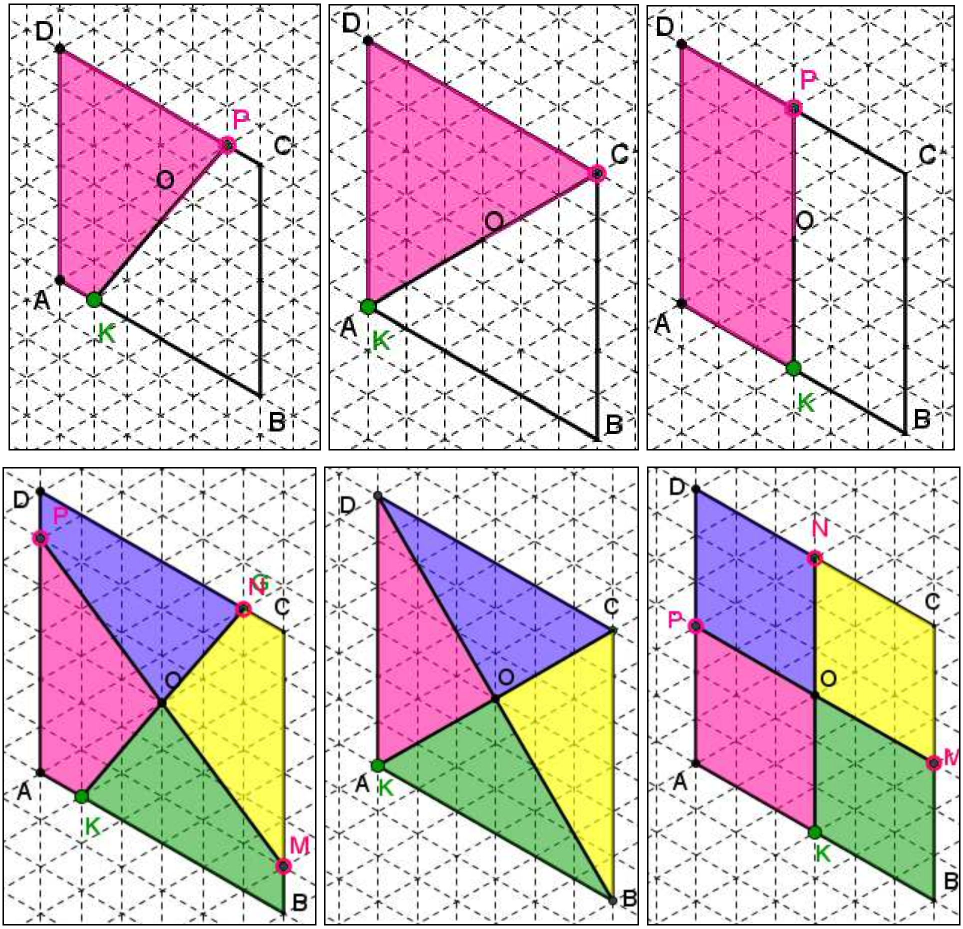
Представяне на суми може да се реализира по различни начини. Интересно е да се наблюдава минаване от едно представяне към друго.



Може да се премине към специален избор на квадрат според знаменателите на обикновените дроби, участващи в сумата.

24

Тук учениците ще приложат изпитаното в нова ситуация – ромб и триъгълна решетка. Акцент се поставя върху аналогията като метод на научно познание, както и различията спрямо изследванията с квадрата.



НЕОБИКНОВЕНО
ЗА
ОБИКНОВЕНИТЕ ДРОБИ

Тони Чехларова, Евгения Сендова

Редактор: акад. Петър Кендеров
Българска, първо издание
2012

Формат 70/100/16

ISBN 978-954-561-282-4