ОБЩИ ЗАДАЧИ

1. Да се представи с нормални многочлени изразът:
а) $(x^2-3)^3-(x-2)(x^2+4)(x+2)-x^4.(x^2-10)$;
б) $(2x-3)^3-(2-3x)^3-35x^3+90x^2$.

Отг.: а) $27x^2-11$; б) $90x-35$.

2. Да се докаже тъждеството:
а) $(2a-b)(2a+b)(4a^2+b^2)=16a^4-b^4$;
б) $8(a-1)^3=a^3+3a^2(a-2)+3a(a-2)^2+(a-2)^3$.

3. а) Да се докаже, че не зависи от x стойността на израза

$$4(x-6)-x^2(2+3x)+x(5x-4)+3x^2(x-1).$$

б) Да се докаже, че не зависи от y стойността на израза

$$2y(y^2-1)-(3-y)^3+(y^2+2).(y+1)-(4y^3+27y-8y^2).$$

4. Да се опрости изразът:
а) $(2x-0,5).(0,5+2x)-(-3x-1)^2+(2x-0,5)^2+x^2$;
б) $(1+2x)^3-(2x-1)^3+(x-1)(x^2+x+1)+(-x-1)(x^2-x+1)$.

Отг.: а) $-8x-1$; б) $24x^2$.

5. Опростете израза $A=-4P-(-2Q-2P-(P-Q))$, ако $P=a^2+2ab+b^2$ и $Q=a^2-2ab+b^2$.

Отг.: $A=-4ab$.

6. Извършете означените действия и приведете в нормален вид:
а) $(-2y+4z).(-5x)-((3x-2y).2z-5y(4x-2z))$;
б) $by-(y-b)(y+b)+b(y-b)$;
в) $(y-3).y-(6y^2-12y):6y,\ \ y\neq 0$.

Отг.: а) $30xy-26xz-6yz$; б) $2by-y^2$; в) y^2-4y+2.

7. На мястото на V поставете такъв едночлен, че да е изпълнено равенството

$$(32y^4x^6-8y^2x^5):V=-2x+8x^2y^2.$$

Отг.: $V=4y^2x^4$.

8. Да се намери числената стойност на израза

$$B=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x\right).4x-(-6x^2+3x):(-3x),\text{ ако } x=\frac{(-2)^2.(-3)^4}{(-3)^2.2^3}.\left(-\frac{2}{3}.1\frac{1}{2}\right)^{10}.$$

Отг.: $B=-19\frac{1}{4}$.

9. Като използвате формулите $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$, пресметнете:
а) 43^2; б) 51^2; в) 78^2; г) 45^2.

Отг.: а) 1849; б) 2601; в) 6084; г) 2025.

10. Опростете израза
$$\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(3x+\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}-2x\right).\left(\frac{2}{3}+2x\right)+x^2+3.\left(-\frac{1}{6}\right)^2.$$

Отг.: $-\frac{2}{9}$.

11. Решете уравнението:
а) $2x^2+(x+5)^2-2(x+7)^2=2(3x-72,5)+(x-6)^2$;
б) $2x+(x-1)^3-x^3=-3x^2$.

Отг.: а) $x=3$; б) $x=\frac{1}{5}$.

12. Докажете, че квадратът на всяко четно число, намален с 4, се дели на 4.

13. а) Опростете израза $\left(-\frac{4}{5}x^7-\frac{2}{3}y^mz^2\right).\left(-\frac{4}{5}x^7+\frac{2}{3}y^mz^2\right)$;
б) Пресметнете 296.304 (по най-рационален начин).

Отг.: а) $\frac{16}{25}x^{14}-\frac{4}{9}y^{2m}z^4$; б) 89984.

14. Докажете, че стойността на израза
$$A=a(x^2+3x+4)-ax(x+3)-2(2x-15),\text{ при } a=x-3$$
не зависи от стойността на x.

15. Преобразувайте израза в нормален многочлен:
а) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^3-\left(x-\frac{1}{2}\right).\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{2}x^2$;

б) $\left(x+\frac{1}{4}\right).\left(x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}\right)-x.\left(x-\frac{1}{8}\right)^2-\left(\frac{1}{2}x-1\right).\left(\frac{1}{2}x+1\right)$.

Отг.: а) $\frac{3}{4}x$; б) $1\frac{1}{64}-\frac{1}{64}x$.

16. Даден е многочленът $M=(ax-1)^2-x(x+2a)+x^2$, където a е параметър.
а) Приведете M в нормален вид.
б) Намерете стойността на M при $a=\frac{1}{2}$ и $x=4$.

Отг.: а) $M=a^2x^2-4ax+1$; б) $M=-3$.

17. Дадени са многочлените $M=x^2+2$ и $N=x^2-2$. Приведете в нормален вид многочлените:
а) $M.N$; б) M^2-N^2; в) M^2+N^2; г) M^3+N^3; д) M^3-N^3.

Отг.: а) x^4-4; б) $8x^2$; в) $2x^4+8$; г) $2x^6+24x^2$; д) $12x^4+16$.

18. Заменете звездичките с едночлени така, че равенството да е тъждество:
а) $(4x+3y)(*-*+*)=64x^3+27y^3$;
б) $(*-*)(16x^2+*+25y^2)=64x^3-125y^3$.

Отг.: а) $(4x+3y).(16x^2-12xy+9y^2)=64x^3+27y^3$;
б) $(4x-5y)(16x^2+20xy+25y^2)=64x^3-125y^3$.

19. Приведете в нормален вид:

а) $A = \dfrac{x}{0,3} - \dfrac{1}{2}(2x+6) + \dfrac{x}{-3}$;

б) $B = \left(\dfrac{3}{2}x - 1\right)^2 - (1,5x-2)\left(\dfrac{3}{2}x+2\right)$;

в) $C = (2+x)^2 - 2(1-x)^2 + (-x+2)^2$;

г) $D = \dfrac{5}{4}\left(x^2 - \dfrac{4}{5}\right) - \left(\dfrac{1}{2}x - 3\right)\left(3 + \dfrac{1}{2}x\right) - 11$;

д) $E = x(x-5)^2 + 4x(2x-3) - (x-2)^3 - (-2x)^2$.

Отг.: а) $A = 2x-3$; б) $B = 5-3x$; в) $C = 6+4x$; г) $D = x^2-3$; д) $E = x+8$.

20. Намерете числената стойност на израза

$$B = 3y^2\left(\frac{1}{8}y + x\right) - \frac{1}{2}y^3(2y-1) + xy(4-3y) + (y^2-2)(y^2+2),$$

ако стойността на x е равна на степента на многочлена $M = 4xy^2 - 2xy + 4x^2$, а y е коренът на уравнението $(y-1)^2 - 2 = y^2 + 3$.

Отг.: $x = 3, y = -2, B = -35$.

21. Опростете израза $2(a^2-1)^2 - (a^2+3)(a^2-3) - \dfrac{1}{2}(a^2+a-4)(2a^2+3)$ и пресметнете стойността му за $a = -\dfrac{1}{2}$.

Отг.: $17\dfrac{1}{2}$.

22. Опростете израза $\left\{\dfrac{\text{о}}{4}[(\text{б}+\text{и})^2 - (\text{б}-\text{и})^2].\dfrac{\text{ч}}{4}[(\text{а}+\text{м})^2 - (\text{а}-\text{м})^2]\right\} + \text{те}$.

Отг.: обичам + те.

23. Да се намерят стойностите на p, при които произведението на многочлените $x^2 + px - 3$ и $x^2 - 5x + 13$ не съдържа x^2.

Отг.: $p = 2$.

24. Да се намери за кои стойности на a и b произведението

$(x^3 + ax^2 + bx - 1)(x^2 - x + 3)$ не съдържа x^4 и x^3.

Отг.: $a = 1, b = -2$.

25. Две успоредни прави са пресечени с трета. Един от вътрешнокръстните ъгли е $\dfrac{5}{9}$ от изправения ъгъл. Да се намери какъв ъгъл сключва ъглополовящата на този ъгъл с другата права.

Отг.: 50°.

26. В $\triangle ABC$ $\sphericalangle CAB$ е с 10° по-голям от $\sphericalangle ACB$, а $\sphericalangle ABC$ е с 70° по-голям от $\sphericalangle CAB$. Да се намери ъгълът между ъглополовящата и височината на $\triangle ABC$ прекарани през върха C.

Отг.: 35°.

27. Даден е $\triangle ABC$, за който BL е ъглополовяща, а точка M лежи на страната AB така, че $CM \perp BL$. Ако $\sphericalangle CAB = 50^\circ$, а $\sphericalangle ACM$ е 60% от него, да се намерят $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle ACB$ на $\triangle ABC$.

Отг.: $20^\circ, 110^\circ$.

28. Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ с прав ъгъл при върха A. Построена е ъглополовящата CL на $\triangle ABC$. През точка A е построена права g, успоредна на CL, която пресича правата BC в точка P. Ако $\sphericalangle PCA$ е с 80° по-голям от $\sphericalangle ACB$, да се намерят ъглите на $\triangle ACP$.

Отг.: $130^\circ, 25^\circ, 25^\circ$.

29. Да се докаже, че ако ъглополовящите на два съответни ъгъла, получени при пресичането на две прави с трета, са успоредни, то и дадените прави са успоредни.

30. Ъглите при върховете A, B и C на $\triangle ABC$ се отнасят както $4 : 2 : 3$. Да се намери:

а) ъгълът между височината и ъглополовящата, прекарани съответно през върховете B и C;

б) ъгълът между ъглополовящата през върха A и ъглополовящата на външния ъгъл при върха C.

Отг.: а) 60°; б) 20°.

31. Да се докаже, че два триъгълника са еднакви, ако имат съответно равни:

а) две страни и медиана към едната от тях;

б) страна, прилежащ ъгъл и ъглополовящата на дадения ъгъл;

в) два ъгъла и ъглополовящата на третия ъгъл.

32. Дадено е, че $\triangle ABC \cong \triangle BAC_1$, а AC и BC_1 се пресичат в т. P. Намерете $\sphericalangle ABC$, ако $\triangle APB$ е правоъгълен и $\sphericalangle ACB = 20^\circ$.

Отг.: 115°.

33. В $\triangle ABC$ ъглополовящата на вътрешния ъгъл при върха C образува със страната AB ъгъл 56°. Намерете ъгъла, образуван от ъглополовящата на външния ъгъл при върха C и продължението на AB.

Отг.: 34°.

34. В $\triangle ABC$ ъглите при върховете A и B са остри. Ъглополовящата AL и височината CD се пресичат в т. H. Ако $\sphericalangle CHL = \sphericalangle CLA$, докажете, че $\sphericalangle ACB = 90^\circ$.

35. Докажете, че ако $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1, AC = A_1C_1$ и $AB + BC = A_1B_1 + B_1C_1$, то $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$.

36. Докажете, че ако $\sphericalangle A = \sphericalangle A_1, \sphericalangle B = \sphericalangle B_1$ и $AB + BC + AC = A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1$, то $\triangle ABC \cong A_1B_1C_1$.

37. Даден е равнобедрен правоъгълен $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90^\circ$). В триъгълника са взети две вътрешни точки M и N, такива, че $\sphericalangle MAC = \sphericalangle MCB = 15^\circ$ и $\sphericalangle NBC = \sphericalangle NCA = 15^\circ$. Докажете, че $\triangle MNC$ е равностранен.

38. Даден е $\triangle ABC$, $\sphericalangle B = 100^\circ$, $BC = 7$ cm. Ъглополовящата $BL(L \in AC)$ пресича медианата $CM(M \in AB)$ под прав ъгъл в т. H. През върха C е построена права $g \| AB$ и $g \cap BL = D$.

а) Намерете дължината на AM.

б) Докажете, че $AD = MC$ и $AD \| MC$.

Отг.: а) 7 cm.

39. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ с ъгъл срещу основата му AB, равен на 40°. Точката D на страната BC е такава, че $\sphericalangle CAD = 40^\circ$. Точката M на ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$ е такава, че $\sphericalangle CAM = 10^\circ$. Докажете, че:

а) $\triangle AMB$ е равностранен;

б) $\triangle BDM$ е равнобедрен;

в) $BD = CM$.

* * *

40. Да се намери нормалният многочлен, тъждествен на:

а) $(5c^2 + cd + d^2).(3cd - 3d^2 - c^2) - (3cd - c^2 - d^2)(5c^2 + cd - 3d^2)$;

б) $(-2 + x)(x^2 + 4) - (3 - x^2)^3 - (x^2 + 1)x + 9x^4 - x^6$;

в) $\left(-\frac{1}{2}y - 1\right)\left(\frac{1}{2}y - 1\right) - y\left(y - \frac{1}{2^3}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)\left(y^2 + \frac{1}{16} - \frac{1}{4}y\right)$.

Отг.: а) $-14c^2d^2 - 6d^4 + 10cd^3$; б) $25x^2 + 3x - 35$; в) $-\frac{1}{64}y + \frac{65}{64}$.

41. Да се намери числената стойност на израза

$$A = \left(\frac{1}{2}x + 2y\right)^3 - \left(2x - \frac{1}{2}y\right)^3 + 7\frac{7}{8}x^3 - 7\frac{1}{2}x^2y \text{ за } x = 1 \text{ и } y = \frac{|-2|.(-1)^8}{|-3| : |3|}.$$

Отг.: 83.

42. Разложете на множители:

а) $x(2 - y) + y(y - 2)$;
б) $(y - 2z).(12y^2 - 7yz) - yz(2z - y)$;
в) $a^2b^2 - ab^2 - ab - a^2$;
г) $m^2n^2 - 4n^2 + m^2 - 4 - 2n(m^2 - 4)$;
д) $9(2a - x)^2 - 4(3a - x)^2$;
е) $b^2 + 6b + 9 - 25c^2$;
ж) $x^2 - 6\frac{1}{4}$;
з) $x^2 + 2x - 24$;
и) $x^2 - 20x + 91$;
к) $6x^2 + 5x - 6$.

Отг.: а) $(y - 2)(y - x)$; б) $6y(y - 2z)(2y - z)$; в) $a(b + 1)(ab - a - b)$; г) $(m+2)(m-2)(n-1)^2$; д) $x(5x-12a)$; е) $(b+3+5c)(b+3-5c)$; ж) $\left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right)$; з) $(x + 6)(x - 4)$; и) $(x - 7)(x - 13)$; к) $6\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)$.

43. Докажете тъждеството:

а) $90b^2 - 35b^3 - (2 - 3b)^3 + (2b - 3)^3 = 5(18b - 7)$;

б) $1 + 2(-a - 2b) + (-a - 2b)^2 = (1 - 2b - a)^2$.

44. Да се докаже, че при всяка стойност на променливата y изразът

$$B = 2(-2y - 1)^2 - (4y + 3)^2 + 8y(y + 2)$$

приема една и съща числена стойност.

Отг.: $B = -7$.

45. Да се реши уравнението:

а) $(12x+5)^2-(8x-1)^2-(10x+7)(8x+3)=78$;

б) $(9x-4)^2+(40x+1)^2-(41x-2)(41x+2)=25$;

в) $9x(3-x)+(x-3)(x^2+9+3x)=1+(x-3)^3$.

Отг.: а) 1,5; б) $\frac{1}{2}$; в) няма решение.

46. Даден е изразът $B=11x^2-99x+220$.

а) Докажете, че ако x е цяло число, то изразът B се дели на 22.

б) Решете уравнението $B=0$.

Отг.: б) $x=4; x=5$.

47. Решете уравнението:

а) $\dfrac{6x+7}{7}+x=\dfrac{80+4x}{5}+\dfrac{30-2x}{-2}$; б) $\dfrac{1+\frac{x}{4}}{2}-\dfrac{\frac{7x}{2}+1}{-6}-\dfrac{1+5x}{24}+\dfrac{\frac{7}{2}+6x}{-12}=\dfrac{1}{3}$;

в) $2y-\dfrac{7y+3}{0,8}=\dfrac{3y+2}{-0,5}+\dfrac{3y+1}{-2}$.

Отг.: а) $x=0$; б) всяко x; в) -1.

48. Да се реши уравнението:

а) $\left|\dfrac{2-\frac{x}{3}}{4}+x-\dfrac{\frac{2x}{5}-1}{(-3)^2-|-3|}\right|=1$; б) $|(-y-1)^2-y(3+y)|=3$;

в) $||2y-5(y+4)|-3|=13$; г) $\dfrac{7z}{\dfrac{|-7|:\frac{1}{7}}{(-7)^2}}+2|z-5|=\dfrac{2^2.(-3)^2}{(-2)^2}+4z$.

Отг.: а) $x=\frac{20}{51}$ или $x=-1\frac{49}{51}$; б) $y=-2$ или $y=4$;

в) $y=-12$ или $y=-1\frac{1}{3}$; г) $z=-1$.

49. Да се реши уравнението, където a и b са параметри:

а) $(2a-x)^2-(2a+x)^2+\left(\dfrac{a}{2}+x\right)\left(\dfrac{a}{2}-x\right)+2x=6-\dfrac{a^2-4x^2}{-4}$;

б) $|2x-1+ax|=a$;

в) $|b-2x|=b-x-1$.

Отг.: а) при $a\neq\frac{1}{4}$ $x=\dfrac{3}{1-4a}$; при $a=\frac{1}{4}$ няма решение; б) при $a\geq 0$ $x=\dfrac{1+a}{2+a}$, $x=\dfrac{1-a}{2+a}$; при $a<0$, няма решение; в) при $b<2$ няма решение; при $b=2$ $x=1$; при $b>2$ $x=1$ $x=\dfrac{2b-1}{3}$.

50. Дадени са многочлените $A=4x^3+2x^2+4x$ и $B=x^3+2+2x^4+4x^2+x$.

а) Да се разложат на прости множители A и B.

б) Да се разложи на прости множители многочленът $C=A+B$ и след това да се намери числената стойност на C, ако x е корен на уравнението

$$2.(-1)^6.|x-5|-4x=9-7x.$$

Отг.: а) $A=2x(2x^2+x+2)$, $B=(x^2+1)(2x^2+x+2)$;

б) $C=(2x^2+x+2)(x+1)^2$; $x=-1; C=0$.

51. Дадено е уравнението $4\left(bx-\frac{7}{4}\right)=5(bx-3)$.

а) За кои стойности на параметъра b уравнението няма решение?

б) За кои стойности на b има корен $x=-\frac{4}{5}$?

в) За кои цели стойности на b има корени естествени числа?

г) Напишете три дробни стойности на b, за които x е естествено число.

Отг.: а) $b=0$; б) $b=-10$; в) $1, 2, 4, 8$; г) $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{4}{9}$.

52. Дадено е уравнението $2ax-3(x-1)=5+ax$, където a е параметър. Да се намери:

а) за кои цели стойности на a уравнението има корен

$$x=\frac{5.3^n+2.3^n}{8.3^{n-1}-3^{n-1}}-\left|\frac{(-2)^3}{-2^2}\right|, \text{ при } n\geq 2.$$

б) за кои стойности на a уравнението има цял положителен корен.

Отг.: а) $a=5$; б) $a=4; 5$.

53. За кои стойности на параметъра m уравненията

$(3x-1)x=2x^2-x(1-x)$ и $(m^2-9)x=m-3$ са равносилни?

Отг.: $m=3$.

54. Дадено е уравнението $\left(\frac{5x-1}{3}-\frac{4x+3}{2}\right)-x=\frac{x-1}{2}-m$, където x е неизвестно, а m е параметър. Да се определи:

а) дали даденото уравнение е равносилно на $11x=6m-\frac{(-2)^2.64}{2^5}$;

б) за кои стойности на m коренът на даденото уравнение е по-голям от -2.

Отг.: а) да; б) $m>5$.

55. Да се реши неравенството:

а) $(x-3)^2+(1-2x)^2<5(x+6)^2-40x.\frac{1}{3}$;

б) $6x-1-\frac{2x-4}{3}-\frac{x^2}{-4}<\frac{x(x+3)}{4}+\frac{x}{-2}$;

в) $\dfrac{6(1+y+y^2)-(y+3)^3+(y+1)^3}{3-y}<0$.

Отг.: а) $x>-3$; б) $x<-\frac{4}{61}$; в) $y<3$; $y\in\left(-1\frac{1}{9}; 3\right)$.

56. Коя е най-малката цяла стойност на x, за която е вярно неравенството

$$\frac{9x+5}{4}-\frac{1}{2}\left(2-\frac{3-2x}{9}\right)<7x?$$

Отг.: 1.

57. Да се реши неравенството $(5x+1)^2-25(x-1)^2<34$ и да се провери дали числото $m=\frac{(-3)^2.24}{3^2.2^3}$ е негово решение.

Отг.: $x<\frac{29}{30}, m=3$ не е решение.

58. Да се намери за коя стойност на параметъра p неравенството $\dfrac{-3p-2x}{-5} \geq \dfrac{2-3x}{-2}$ е еквивалентно на $x \leq 2$.

Отг.: $p = 2$.

59. Да се намерят целите отрицателни решения на неравенството

$$2y + (2-y)^2 < (-y-(-2)^2)^2 - \frac{14y+3}{2}.$$

Отг.: $-3; -2; -1$.

60. Решете неравенството $\dfrac{3}{7}(y+m) > \dfrac{6y-m}{3} - \left(2^0 + \dfrac{3-my}{7}\right)$, където m е параметър.

Отг.: при $m > -11$ $y < \dfrac{16m+30}{33+3m}$; при $m < -11$ $y > \dfrac{16m+30}{33+3m}$; при $m = 11$, няма решение.

61. Намерете естествените числа, които са решение на системата

$$\left| \begin{array}{l} (y-1)(1+y) + \dfrac{(-2)^2.3^0}{2} \geq (1-y)^2 \\ -\dfrac{1+3y}{-3} \leq \dfrac{5+y}{2} \end{array} \right.$$

Отг.: $1; 2; 3; 4$.

62. Решете неравенството:

а) $|(3x-1)^2 + (3x-1)(1+3x) - 3(x+1)| < 5$;

б) $\left|\dfrac{3x-1}{3} - \dfrac{2x+1}{-6} + 4x\right| > 3$.

Отг.: а) $x \in \left(-\dfrac{8}{9}; \dfrac{2}{9}\right)$; б) $x \in \left(-\infty; -8\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{19}{32}; +\infty\right)$.

63. Определете параметъра c в неравенството $\big||-2^2|y-c|\big| > -\dfrac{|-5|.5^3}{-125}$ така, че решенията му да определят множеството $\left(-\infty; -\dfrac{3}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

Отг.: $c < 2; c > -1$.

64. В двуцифрено число цифрата на десетиците е два пъти по-голяма от цифрата на единиците. Ако към това число прибавим число, което е написано със същите цифри, но в обратен ред, получаваме най-голямото двуцифрено число, което се дели на 3. Намерете това число.

Отг.: 63.

65. Валери намислил трицифрено число, записал към него отляво петица и към полученото четирицифрено число прибавил 3, разделил на 15 и получил частно, с 14 по-голямо от намисленото число, и остатък 5. Намерете намисленото число.

Отг.: 342.

66. Ученик от седми клас трябвало да реши всичките задачи от сборника по математика за определен брой дни, като решава по 12 задачи на ден. След първите два дни той започнал да решава с 50% повече от предвидените на ден задачи, поради което решил задачите от сборника два дни по-рано. Колко са задачите в сборника и за колко дни са решени?

Отг.: 96 задачи; 6 дни.

67. Три комбайна ожънали общо 120 тона жито. По колко тона жито е ожънал всеки комбайн, ако количеството, ожънато от втория комбайн, е равно на $\frac{3}{4}$ от това на първия, а третият комбайн е ожънал с 8 тона повече жито от първия и втория заедно?

Отг.: 32 т; 24 т; 64 т.

68. Работник в магазин „Фантастико" трябвало да пренесе определен брой каси с мляко, като пренася по 50 каси на час. Да се определи колко каси е трябвало да пренесе, ако времето за пренасянето им е с 6 часа по-малко от времето, за което друг работник, пренасящ 70 каси с мляко на час, пренася два пъти повече каси от определените за пренасяне от първия работник.

Отг.: 700 каси.

69. Дърводелска работилница трябвало да изработи за 4 дни поръчка за направа на малки маси за първокласници. Първия ден били изпълнени $26\frac{2}{3}\%$ от цялата поръчка, а втория ден с $\frac{1}{20}$ повече, отколкото през първия ден. Останалата част от поръчката била изпълнена през другите два дни поравно. За колко маси е била поръчката, ако се знае, че изработените през третия ден маси били с 48 по-малко от тези, изработени през първия ден?

Отг.: 1200 маси.

70. Автобус трябвало да измине разстоянието от Смолян до Бургас за определено време. Ако автобусът тръгне от Смолян и се движи със скорост 80 km/h, ще пристигне в Бургас 50 минути по-рано от определеното време, а ако се движи със скорост 60 km/h, в определеното време ще му останат още 50 km до Бургас.

а) Да се намери разстоянието между Смолян и Бургас.

б) Да се намери времето, за което автобусът е трябвало да измине разстоянието от Смолян до Бургас по разписание.

Отг.: а) 400 km; б) 5 h 50 min.

71. При подготовка на тържество управител на ресторант закупил 10 килограма кайма, смес от телешко и свинско месо, в отношение 2:3. Тъй като готвачът преценил, че в закупената кайма трябва да преобладава телешкото месо, било закупено още телешко месо, така че количественото отношение на телешкото месо към свинското станало 4:3. Колко килограма телешко месо са закупили допълнително?

Отг.: 4 kg.

72. Три приятелки – Латинка, Силвина и Никол, работили през лятната ваканция в магазин за хранителни стоки. В края на договорения срок управителят им заплатил общо 1248 лв. Тъй като всяко от момичетата работило различен брой дни, парите били разпределени по следния начин – Латинка получила 25% от общата сума, а парите, взети от Силвина и Никол, се отнасяли както 1:5. По колко лева е получило всяко от момичетата?

Отг.: Латинка – 312 лв.; Силвина – 156 лв.; Никол 780 лв.

73. Турист изминал разстоянието от A до B със средна скорост 6 km/h и разстоянието от B до C – със средна скорост 4 km/h. Да се намери разстоянието от A до C и времето, за което туристът го е изминал, ако средната му скорост за целия път е 4,5 km/h и разстоянието от B до C е с 9 km по-голямо от разстоянието от A до B. Каква щеше да бъде средната скорост на туриста от A до C, ако беше изминал разстоянието от A до B със средна скорост 5 km/h?

Отг.: 27 km и 6 h; $4\frac{2}{7}$ km/h.

* * *

74. Да се намерят ъглите в триъгълник, ако е известно, че височината и медианата, построени през един от върховете му, разделят ъгъла при този връх на три равни части.

Отг.: $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

75. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$, в който ъглополовящата $CL(L \in AB)$ и височината $AD(D \in BC)$ се пресичат в точка P. Ъгъл ACL е три пъти по-малък от $\sphericalangle BLC$.

а) Да се докаже, че $AB = CB$.

б) Ако $\sphericalangle PAL = 30^\circ$ и $PL = 6$ cm, да се намери CP.

Отг.: б) 12 cm.

76. От средата M на страната AC на $\triangle ABC$ е издигнат перпендикуляр към AC до пресичането му със страната AB в точка P.

а) Докажете, че периметърът на $\triangle BPC$ е равен на $AB + BC$.

б) Намерете ъглите на $\triangle ABC$, ако $\sphericalangle PCB = \frac{1}{3} \sphericalangle ACP$ и $\sphericalangle PCB = \frac{1}{5} \sphericalangle ABC$.

Отг.: б) $45^\circ, 75^\circ, 60^\circ$.

77. Равнобедрените триъгълници ABC и ABD имат обща основа AB (точките C и D са различни).

а) Докажете, че $AB \perp CD$.

б) Пресметнете градусните мерки на ъглите в $\triangle ABC$, ако $\sphericalangle DAB : \sphericalangle DCB = 1 : 2$ и $DC = AD$.

в) Ако лъчът $AB^{\rightarrow}$ е ъглополовяща на $\sphericalangle DAC$ и M е произволна точка върху отсечката CD, докажете, че $BD - \dfrac{CD}{2} < AM \leq BD$.

Отг.: б) $54^\circ, 54^\circ, 72^\circ$; $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$ – в различни полуравнини.

78. В правоъгълния триъгълник ABC към хипотенузата AB е построена медиана CD. През точка D е построена права, перпендикулярна на CD, до пресичането ѝ с правите AC и BC съответно в точките E и F. Нека M е среда на EF. Да се докаже, че правата CM е перпендикулярна на AB.

79. Даден е остроъгълен триъгълник ABC, в който височината $CD(D \in AB)$ е равна на ъглополовящата $AL(L \in BC)$ и $AC = 2AD$. Да се докаже, че:

а) триъгълникът ABC е равностранен.

б) ако точката P е вътрешна за отсечката AB, а точката X е вътрешна за отсечката CP, то $CP < BC$ и $CX < AX + BX$.

80. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$. Височините $AM(M \in BC)$ и $CD(D \in AB)$ се пресичат в точка H.

а) Да се намерят ъглите на триъгълника, ако $\sphericalangle AHC = 100°$ и $\sphericalangle BAC : \sphericalangle ACB = 2 : 3$.

б) Да се докаже, че периметърът на $\triangle AMC$ е по-голям от периметъра на $\triangle DMC$.

Отг.: а) $40°, 60°, 80°$.

81. В $\triangle ABC$ са построени вътрешните ъглополовящи AA_1 и BB_1 ($A_1 \in BC, B_1 \in AC$), които се пресичат в точка L. Да се докаже, че ако $\sphericalangle ALB = 135°$, то:

а) триъгълникът ABC е правоъгълен;

б) сумата от разстоянията от точките A_1 и B_1 до правата AB е по-голяма от A_1B_1 и по-малка от $2A_1B_1$.

82. В даден триъгълник една от медианите му е перпендикулярна на една от ъглополовящите му.

а) Да се докаже, че една от страните на триъгълника е два пъти по-голяма от друга страна на триъгълника.

б) Да се намерят ъглите на триъгълника, ако медианата е равна на една от страните на триъгълника.

Отг.: б) $90°; 60°; 30°$.

83. Даден е $\triangle MNP$, в който $MN = 20$ dm, $NP = 12$ dm и $\sphericalangle MNP = 60°$. Ъглополовящата на този ъгъл пресича MP в точка Q.

а) Ако $NQ = 16$ dm, да се намерят лицата на $\triangle MNQ$ и $\triangle PNQ$.

б) Да се определи отношението $MQ : QP$.

Отг.: а) 80 dm^2; 48 dm^2; б) $5 : 3$.

84. Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ с катети $AC = 15$ cm и $BC = 10$ cm. Върху страната BC е взета произволна точка M и върху AB – точка K така, че $MK = MB$. През K е прекарана права, перпендикулярна на MK, която пресича AC в точка E. Да се намери периметърът на четириъгълника $CMKE$.

Отг.: 25 cm.

85. Една от страните на правоъгълник е два пъти по-малка от диагонала му.

а) Да се намери ъгълът между диагоналите на правоъгълника.

б) Да се докаже, че разстоянието от връх на правоъгълника до негов диагонал е равно на разстоянието от пресечната точка на диагоналите му до по-малката страна на правоъгълника.

86. Периметърът на успоредника $ABCD$ е 28 cm. През D е построена ъглополовящата на външния ъгъл на успоредника, която пресича продълженията на AB и BC съответно в точките M и P. Да се докаже, че $\triangle BMP$ е равнобедрен и да се намери бедрото му.

Отг.: 14 cm.

87. Страните на успоредник са 17 cm и 15 cm. Да се намерят диагоналите на четириъгълника, образуван от ъглополовящите на ъглите на дадения успоредник.

Отг.: 2 cm.

88. Даден е успоредникът $ABCD$ с периметър 6,2 dm. Права, минаваща през пресечната точка на диагоналите му, пресича AB и CD съответно в точките P и Q, като $PB = 0,5$ dm, а $QC = 1,2$ dm. Да се намерят:

а) страните на успоредника;

б) лицето му, ако един от ъглите на успоредника е 30°.

Отг.: а) 1,7 dm; 1,4 dm; б) 1,19 dm^2.

89. Даден е правоъгълникът $ABCD$, диагоналите на който се пресичат в точка O.

а) Да се намери отсечката BC, ако $BD = 10$ cm и симетралата на отсечката AO минава през точка D.

б) Точките M и P са съответно от отсечките AB и OB, такива, че $OM = OP$. Да се докаже, че $\sphericalangle AOM = 2 \sphericalangle BMP$.

Отг.: а) 5 cm.

90. Външно за равностранния триъгълник ABC е построен равнобедрен правоъгълен триъгълник ACD с хипотенуза AC. Симетралите на отсечките AB и BC се пресичат в точка O, а перпендикулярът, издигнат от точка C към правата BC, пресича правата BD в точка P. Да се докаже, че:

а) точка O лежи на правата BD;

б) четириъгълникът $AOCP$ е ромб;

в) $\dfrac{OD}{2} < OB < OD$.

91. В квадрат е вписан правоъгълник така, че на всяка страна на квадрата се намира по един връх на правоъгълника и страните на правоъгълника са успоредни на диагоналите на квадрата. Намерете страните на правоъгълника, ако се знае, че едната от тях е два пъти по-голяма от другата и че диагоналът на квадрата е 12 m.

Отг.: 4 m, 8 m.

92. Да се построи равностранен триъгълник по дадена височина.

93. Да се построи триъгълник, ако две от страните и медианата към третата му страна са равни съответно на три дадени отсечки.

94. Да се построи правоъгълник по дадена страна и ъгъл между диагоналите му.

95. Дадени са две точки и права. Да се построи ромб, така че едната точка да бъде връх на ромба, другата – пресечна точка на диагоналите му, и един от върховете на ромба да лежи на дадената права.

96. Да се построи квадрат, три от върховете на който лежат на три дадени успоредни прави.

* * *

97. Да се докаже, че ако x, y, z са числа, за които $x+y+z=0$ и $x^2+y^2+z^2=4$, то $x^4+y^4+z^4=8$.

(НПМГ, 1977 г.)

98. Дадени са многочлените $A = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$ и $B = x^5 - x^4 - x + 1$.

а) Разложете A и B на прости множители.

б) Разложете многочлена $C = A - B$ на прости множители и намерете числената му стойност, като заместите x с корена на уравнението $|x - 2 + b| + a = 5$, където a и b се определят от равенствата $a^a = 1^a$ и $5^b = (-3)^b$.

(НПМГ, 1978 г.)

Отг.: $A = (x-1)^3.(x+1)^2; B = (x-1)^2.(x+1)(x^2+1);$
$C = -2(x-1)^2(x+1) - 350 : 18.$

99. Дадени са изразите $P = b^2x + 2b$ и $Q = 4x + b^2$, където b е параметър.

а) Да се реши уравнението $P = Q$.

б) Да се намерят онези цели стойности на параметъра b, за които уравнението $P = Q$ има едно цяло решение.

в) Да се реши неравенството $P > Q$ при $b = 2\left(\frac{1}{16^2} + \frac{1}{8^3}\right) : \left(\frac{1}{4}\right)^4 - 25 : \frac{125.5^0.5^4}{5^6}$.

(НПМГ, 1994 г.)

Отг.: а) При $b = 2$, всяко x е решение; $b = -2$ – н.р.; $b \neq \pm 2$
$x = \frac{b}{b+2}$; б) $b = -4; -3; -1; 2.$

100. а) Да се разложат на множители от първа степен изразите

$$A = t^2 - 2t - 3 \quad \text{и} \quad B = (x^2 - 2x)^2 + 2(2x - x^2) - 3.$$

б) Да се докаже, че за всяко x е изпълнено неравенството $B > -5$.

в) Да се намерят всички цели числа x, за които стойността на израза B е равен на 1152.

(НПМГ, 1997 г.)

Отг.: а) $A = (t-3)(t+1); B = (x-3)(x+1)(x-1)^2$; в) $x = -5, x = 7.$

101. За числата a и b е известно, че $ab \neq 0$ и $a^4 = 3a^2b^2 + 4b^4$.

а) Да се докаже, че $a^2 = 4b^2$ и $|a| = 2|b|$.

б) Да се намерят числените стойности на изразите $A = \frac{a}{b}$ и $B = \frac{(a+b)^4}{a^4 + b^4}$.

в) Да се намерят всички цели числа a, за които $999|a| + |b| \leq 1999$.

(НПМГ, 1999 г.)

Отг.: б) $A = \frac{a}{b} = -2$; $B = 8\frac{1}{17}$; в) $-2, -1, 0, 1, 2.$

102. Разложете на множители израза $M = 2a^2 + b^2 + 3ab - 2a - b$ и докажете, че ако $b = 4$ и a е цяло число, то M се дели на 4 без остатък.

(Олимпиада, 1970 г.)

Отг.: $M = (a + b - 1)(2a + b)$ при $b = 4, M = 2(a+2)(a+3).$

103. Даден е изразът

$$A = 9x\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9}x\right) - (2x^3 - 4x) : (-2x).$$

а) Да се намери числената стойност на A, ако $x = \frac{(-3)^3.(-2)^3}{(-2)^2.3^2}.\left(-\frac{3}{7}.2\frac{1}{3}\right)^7$.

б) Да се намери B, така че $A.B = 27x^3 - 8$ за всяко $x \neq \dfrac{2}{3}$.

в) Да се намери най-малкото цяло число, което удовлетворява неравенството $3 + A \geq 0$.

(Олимпиада, 1998 г.)

Отг.: а) $A = 3x - 2$, $x = -6$, $A = -20$; б) $9x^2 + 6x - 4$; в) 0.

104. Дадени са многочлените

$$A = 2|x + y| - (x + |y|) \text{ и } B = -x^2 - y^2.$$

а) Да се намери числената стойност на многочлена $M = A : B$, ако x е коренът на уравнението $(-x - 0,5)^2 - \left(-1 + \dfrac{x}{2}\right)^2 - 3.(0,5x - 1)\left(\dfrac{x}{2} + 1\right) = 0,25$, а $y = \dfrac{5.7^n + 2.7^n}{8.7^{n-1} - 7^{n-1}} - 3^2$ $(n \geq 2)$.

б) Ако $y = 0$, намерете всички стойности на x, за които $A = x$.

(Оолимпиада, 2003 г.)

Отг.: а) $x = -1; y = -2; M = -1$; б) $\forall x \geq 0$.

105. а) Да се докаже, че ако x и y са положителни числа, такива, че $xy = 1$, то $x + y \geq 2$.

б) Да се докаже, че ако a, b, c и d са положителни числа, такива, че $ab = 1$ и $cd = 1$, то $(a + c)(b + c)(a + d)(b + d) - (ad + bc)(ac + bd) \geq 12$.

(Олимпиада, 1995 г.)

106. Дадено е уравнението $a^2x = 2 + 4x - a$, където a е параметър.

а) Решете уравнението.

б) За кои цели стойности на параметъра a даденото уравнение има само цели корени?

в) Намерете всички стойности на параметъра a, при които числото 1 е корен на уравнението.

(НПМГ, профил математика, 1998 г.)

Отг.: а) $a = 2$; всяко рационално число x е решение; $a = -2$ – н.р.; $a \neq \pm 2$, $x = -\dfrac{1}{a + 2}$; б) $a_1 = 2, a_2 = -3$.

107. На световно футболно първенство отборите A и B играли помежду си два мача. В първия мач отбор A вкарал два пъти повече голове от отбор B, а във втория мач отбор B вкарал два пъти повече голове от отбор A.

а) Кои са възможните резултати от двата мача, ако е известно, че общият брой голове от двата мача е 12?

б) Кои са възможните резултати от двата мача, ако е известно, че отбор A и в двата мача е вкарал един и същ брой голове, а общият брой голове от двата мача е по-малък от 17?

(НПМГ, 1994 г.)

Отг.: а) 1 случай: I мач 6:3, II мач 1:2; 2 случай: I мач 4:2, II мач 2:4; 3 случай: I мач 2:1, II мач 3:6; б) I мач 2:1, II мач 2:4.

108. Три момчета – Иван, Петър и Стоян, си разделяли орехи. Отначало Иван дал на другите двама по една четвърт от своите орехи и още по половин орех. След това Петър дал на Иван и на Стоян по една четвърт от намиращите се в него орехи и още по половин орех. Накрая същото направил и Стоян. В резултат на това се оказало, че всички имат по тридесет ореха. По колко ореха е имал всеки първоначално?

(НПМГ, 1990 г.)

Отг.: Стоян – 50 ореха, Иван – 14 ореха, Петър 26 ореха.

109. От A за B тръгнал велосипедист. Едновременно с него от B за A тръгнали втори и трети велосипедист. След един час вторият велосипедист се намирал на равни разстояния между първия и третия. След колко време от началото на движението третият велосипедист се е намирал между другите двама, на равни разстояния от тях, ако се знае, че велосипедистите не са променяли посоката на движението си?

(НПМГ, 1986 г.)

Отг.: След 3 часа.

110. Една цистерна разпределяла минерална вода в две детски градини.

а) В първата детска градина напълнили няколко бидона от 40 l и два пъти повече бидони от 20 l. Същото количество вода може да се напълни в няколко бидона от 20 l и два пъти повече бидони от 40 l и тогава общият брой бидони ще бъде с 3 по-малък, отколкото са напълнени в действителност.

б) Във втората детска градина напълнили няколко бидона по 30 l, като един от бидоните не бил съвсем пълен. Ако същото количество вода за тази детска градина се налее в бидони от 50 l, ще бъдат напълнени изцяло 5 бидона по-малко.

По колко литра вода са докарали във всяка детска градина?

(НПМГ, 1995 г.)

Отг.: I детска градина – 400 l; II детска градина – 350 l.

111. Разглеждаме всички петцифрени числа, на които първите две цифри са еднакви и последните две цифри също са еднакви. Да се намерят най-малкото и най-голямото от тях, които се делят на 89.

(Олимпиада, 1995 г.)

Отг.: най-малкото число е 44055; най-голямото число е 88911.

112. В пристанище A танкер разтоварил 1997 тона нефт в два вида цистерни: едните с вместимост 20 тона, а другите – с 47 тона. По разписание след разтоварването танкерът трябвало да измине разстоянието до пристанище B за 20 часа. Поради удължаване на престоя в A, за да пристигне танкерът на време в B, се наложило да увеличи скоростта си с $6\frac{2}{3}\%$.

а) С колко часа повече от предвиденото време е продължил престоят в A?

б) В колко цистерни са разтоварили нефта, ако се знае, че общият брой на цистерните е възможно най-малък и всички цистерни са напълнени изцяло?

(НПМГ, профил математика, 1997 г.)

Отг.: а) 1 h и 15 min; б) 58.

113. В $\triangle ABC$ $\sphericalangle ACB = 36^\circ, CA = CB, BL$ е ъглополовяща на $\sphericalangle ABC$ ($L \in AC$). Симетралата на отсечката BL пресича правите AB и AC съответно в точките N и P.

Да се докаже, че:

а) $LN \| BC$; б) $AL = BN$; в) $\sphericalangle ACN < \sphericalangle CPN$.

(НПМГ, профил математика, 1994 г.)

114. Даден е триъгълник ABC, в който $AC < BC$. На страната CB и лъча $CA^{\rightarrow}$ са взети съответно точките A_1 и B_1 така, че $CA_1 = CA$ и $CB_1 = CB$.

а) Правата A_1B_1 пресича страната AB в т. O. Да се докаже, че лъчът $CO^{\rightarrow}$ е ъглополовяща на ъгъла ACB.

б) Точките M и M_1 са среди съответно на отсечките AB и A_1B_1. Да се докаже, че $CM = CM_1$ и CO е перпендикулярна на MM_1.

(Олимпиада, 1998 г.)

115. В правоъгълника $ABCD$ са построени перпендикулярите BP и DH към AC ($P \in AC, H \in AC$).

а) Да се докаже, че точките B, H, D и P са върхове на успоредник или точките P и H съвпадат.

б) Нека точките P и H делят диагонала AC на три отсечки, една от които е равна на сумата от другите две. Да се изчислят $\sphericalangle DBC$ и $S_{ABCD} : S_{\triangle ABH}$.

(НПМГ, профил математика, 1995 г.)

Отг.: $\sphericalangle DBC = 30^\circ$, $S_{ABCD} : S_{\triangle ABH} = 8 : 1$.

116. Даден е $\triangle ABC$ ($AC > BC$). Върху страните BC и AC са взети съответно точките M и N така, че $\sphericalangle NMC = \sphericalangle BAC$. Ъглополовящите на $\sphericalangle BAC$ и на $\sphericalangle ABC$ се пресичат в точка O, която лежи на MN. През точка O е построена права, успоредна на AB, която пресича страните AC и BC съответно в точките P и Q.

а) Намерете дължината на AB, ако периметърът на $\triangle ABC$ е с 9 см по-голям от периметъра на $\triangle PQC$.

б) Докажете, че $\triangle OPN \cong \triangle OMQ$ и $MN = AN + BM$.

(Олимпиада, 2003 г.)

Отг.: $AB = 9$ cm.

117. Даден е четириъгълникът $ABCD$, в който $\sphericalangle DAC = 40^\circ$, $\sphericalangle BAC = 30^\circ$ и $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACD = 20^\circ$. Да се намери $\sphericalangle DBC$.

(Олимпиада, 1998 г.)

Отг.: $\sphericalangle DBC = 80^\circ$.

118. Даден е остроъгълен триъгълник ABC.

а) Страната $AC = b$, а страната $BC = a$ ($a > b$) и височините AA_1 и BB_1 имат дължини съответно m и p. Върху отсечката BB_1 е избрана такава точка K, че $BK = p - m$. През точка K е построена права $l \perp BB_1$, която пресича страната BC в точка M. Да се докаже, че $BM = a - b$ и $\sphericalangle AMC = \sphericalangle AMK$.

б) Ако $\triangle ABC$ е равностранен и точките M и N лежат върху AC така, че $AM = MN = NC$, а точка P е от страната BC, такава, че $BC = 3PB$, да се намери $\sphericalangle BNP + \sphericalangle BMP$.

(Олимпиада, 2002 г.)

Отг.: 30°.

119. В триъгълника ABC точката D е вътрешна за отсечката AB, а точката K лежи на лъча AC така, че C е между A и K и $\sphericalangle BCK = \sphericalangle DCA$.

а) Да се докаже, че ъгълът ACB е тъп.

б) През D е построена права, успоредна на BC, която пресича AC в точка M. Ако $2 \sphericalangle CAB + 3 \sphericalangle CBA = 180°$, да се докаже, че BM е ъглополовяща на ъгъл ABC.

(Олимпиада, 1995 г.)

120. В триъгълника ABC е избрана вътрешна точка M така, че $\sphericalangle AMC = 120°$, $\sphericalangle BMC = 60°$ и $AM + MC = BC$. Докажете, че $BM = AC$.

(Олимпиада, 1990 г.)

121. Пресметнете $x^3 + y^3$, ако $x + y = a$ и $x^2 + y^2 = b$.

(Олимпиада, 1973 г.)

Отг.: $\dfrac{3ab - a^2}{2}$.

122. Симетралата на диагонала BD на правоъгълника $ABCD$ пресича страните AB и CD съответно в точки N и M, като $DM = 2MC$.

а) Да се докаже, че триъгълникът NMB е равностранен.

б) Да се докаже, че $\dfrac{1}{2}AC < MN < AC$.

в) Да се намери лицето на правоъгълника $ABCD$, ако $S_{NMB} = 6$ cm^2.

(НПМГ, профил математика, 1996 г.) ***Отг.:*** $S_{ABCD} = 18$ cm^2.

123. Външно за равностранния триъгълник ABC е построен равнобедрен триъгълник ACD с основа AC. Симетралите на отсечките AB и BC се пресичат в точка O, а перпендикулярът, издигнат от точката C към правата BC, пресича правата BD в точка P.

Да се докаже, че:

а) точка O лежи на правата BD;

б) четириъгълникът $AOCP$ е ромб;

в) $\dfrac{OD}{2} < OB < OD$.

(НПМГ, профил математика, 1997 г.)

124. Нека x и y са две рационални числа. Да се докаже, че ако $x.y = 2$ и $x > y$, то $\dfrac{x^2 + y^2}{x - y} \geq 4$.

(Олимпиада, 2001 г.)

125. В турнир по тенис взели участие n състезатели, като всеки двама играли помежду си точно по един път. В тениса всяка игра завършва с победа за единия състезател и със загуба за другия (няма игра, завършила наравно). Нека за целия турнир първият състезател има a_1 на брой победи и b_1 на брой загуби; вторият има a_2 победи и b_2 загуби и т.н. n-тият състезател има a_n победи и b_n загуби. Да се докаже, че

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2.$$

(Олимпиада, 2001 г.)

126. Да се намерят целите числа n, за които $|2n^4 + n^3 + 3n^2 + 2n - 2|$ е просто число.

(Олимпиада, 1998 г.)

Отг.: За $n = 0 : A = 2$ е просто число.

127. а) Да се реши уравнението:

$$4 + 7\left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3}x\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6} - \frac{2x}{3}\right) = -5\left(\frac{2x}{3} - \frac{1}{6}\right) + (-2)^2.$$

б) Да се докаже, че ако $ab = 8$, то $a^2 + b^2 - 8a + 8b \geq 0$.

(ТУЕС, София, 2001 г.)

Отг.: а) $x = \frac{1}{4}$.

128. На едно автомобилно рали колата A финиширала, когато колата B била на 3,5 km от финала. Двете коли стартирали едновременно и се движели по един и същ маршрут с постоянна скорост. Колата A завършила състезанието за 35 минути и скорост 132 km/h.

а) Да се намери скоростта на колата B.

б) С колко процента скоростта на колата B е по-малка от скоростта на колата A?

(ТУЕС, София, 2001 г.)

Отг.: а) 126 km/h; б) $4\frac{6}{11}\%$.

129. Даден е равнобедрен триъгълник ABC ($AC = BC$).

а) Да се докаже, че триъгълникът с върхове средите на страните на $\triangle ABC$ е равнобедрен.

б) Да се намери лицето на $\triangle ABC$, ако ъгълът между бедрата е $30°$ и разстоянието от средата на основата до бедрото е 3 cm.

(ТУЕС, София, 2001 г.)

Отг.: б) $S_{ABC} = 36$ cm^2.

130. Точките M, N, P и Q лежат съответно върху страните AB, BC, CD и DA на правоъгълника $ABCD$ и $AM : MB = BN : NC = CP : PD = DQ : QA = 6 : 2$. Да се докаже, че:

а) правите MP, NQ, AC и BD се пресичат в една точка;

б) ако K е среда на CD, то четириъгълниците $MNPQ$ и $AMKD$ са равнолицеви.

(ТУЕС, София, 2001 г.)

131. а) Да се реши уравнението $x^2 - 4x + 4 = 81$.

б) Да се реши неравенството

$$-2x - \frac{5}{6} < \frac{1}{2}\left(2 - \frac{3 - 2x}{3}\right) - \frac{x}{0,5} - \frac{5}{4}.$$

Кое е най-малкото цяло решение на неравенството?

(ТУЕС, София, 2002 г.)

Отг.: а) $x = -7, x = 11$; б) $x > -\frac{1}{4}$. Най-малкто цяло решение на неравнството е 0 или $x > -\frac{1}{4}; 0$.

132. В автосалон има бели, сини и черни коли. Броят на белите и черните коли е с 11 по-голям от броя на сините коли.

а) Да се намери броят на колите в автосалона, ако броят на сините коли е с 25% по-голям от броя на белите коли, а броят на черните коли е с 25% по-малък от броя на сините коли.

б) Ако броят на белите коли е 14 и отношението на броя на сините коли към броя на черните коли е $6 : k$, да се определят възможните стойности на естественото число k.

(ТУЕС, София, 2002 г.)

Отг.: а) 51; б) 3, 4 и 5.

133. Даден е равнобедрен триъгълник ABC с $\sphericalangle ACB = 150°$. Отсечката CM ($M \in AB$) е медиана на триъгълника. През върха A е прекарана права, перпендикулярна на AC, която пресича правата CM в точка P.

а) Ако $AM = 4$ cm, да се намерят CP и лицето на $\triangle APC$.

б) Да се докаже, че периметърът на $\triangle APC$ е по-голям от периметъра на $\triangle ABC$.

(ТУЕС, София, 2002 г.)

Отг.: а) $CP = 16$ cm; $S_{APC} = 32$ cm^2.

134. Върху симетралата на страната AB на квадрата $ABCD$ е взета точка M така, че $MB = AB$. Да се намери мярката на $\sphericalangle CMD$.

(ТУЕС, София, 2002 г.)

Отг.: $30°, 150°$.

135. а) Да се реши уравнението $\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^3 - \left(y-\dfrac{1}{2}\right)^3 = 0,25 - 6y$.

б) Да се намерят целите отрицателни числа, които са решения на неравенството

$$\frac{\dfrac{x}{3}-1}{\dfrac{7}{3}} - 2\left(x - \frac{3x-7}{4}\right) \le -4\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{8}\right).$$

(ТУЕС, София, 1998 г.)

Отг.: а) $0, -2$; б) $-2, -1$.

136. Двама работници трябва да извършат определена работа. Първият работник може сам да свърши работата за 12 дни. Времето, за което вторият работник може да свърши сам работата, е с 25% повече от това на първия.

а) Първият работник работил сам 3 дни, а след това се включил и вторият работник. Да се намери още колко дни трябва да работят двамата заедно, за да свършат цялата работа.

б) Ако първият работник е работил сам 3 дни, колко дни още трябва да работят заедно работниците, за да свършат поне 70% от работата?

(ТУЕС, София, 1998 г.)

Отг.: а) 5 дни; б) от 3 до 5 дни.

137. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$. Симетралата на AB пресича височината BD в точка P (точка P е между точките B и D).

а) Ако точка P е на равни разстояния от правите AC и AB, да се намери градусната мярка на $\sphericalangle CAB$ и градусните мерки на ъглите на $\triangle ABP$.

б) Ако точка N е среда на BP, а точка M е среда на AB, докажете, че $MN \| AP$ и $MN = \frac{1}{2}AP$.

(ТУЕС, София, 1998 г.)

Отг.: а) $\sphericalangle CAB = 60°$; $30°$, $30°$, $120°$.

138. Диагоналите на ромба $ABCD$ се пресичат в точка O, като $AB = 2OB$.

а) Намерете ъглите на ромба.

б) Ако M и N са точки съответно от AB и BC така, че $MB = NC$, да се докаже, че $\triangle MND$ е равностранен.

(ТУЕС, София, 1998 г.)

Отг.: а) $60°, 120°$.

139. Да се реши:

а) уравнението $(-x-2)^2 - (3+x)(x-3) + x(0,8-x) + x(x-0,8) = 2$;

б) неравенството $\left(\frac{2x-1}{2}\right)^2 - \left(3x - 1\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3} - \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) < 5 + 0,5x$ и да се намери най-малкото цяло четно число, което е решение на неравенството.

(ТУЕС, София, 1999 г.)

Отг.: а) $x = -2\frac{3}{4}$; б) $x = 0 > -\frac{7}{4}$.

140. Двама работници се наели да направят един изкоп. Единият работник може сам да свърши работата за 10 дни, а другият за 15 дни. След като работили известно време заедно, поради събаряне на пръст, работата се увеличила с $16\frac{2}{3}\%$ от първоначалната. Да се намери:

а) за колко дни двамата са направили изкопа;

б) каква част от цялата работа е свършил всеки един от тях.

(ТУЕС, София, 1999 г.)

Отг.: а) 7 дни; б) 60%, 40%.

141. Даден е успоредник $ABCD$, за който върхът D лежи на симетралата на страната AB.

а) Ако $AB = 10$ cm и $\sphericalangle ADC = 135°$, намерете лицето на успоредника.

б) Ако $\sphericalangle ABC = 120°$, намерете ъгъла между диагоналите AC и BD и $\sphericalangle DAC$.

(ТУЕС, София, 1999 г.)

Отг.: а) $S_{ABCD} = 50$ cm^2; б) $30°$.

142. Даден е $\triangle ABC$, за който $AM (M \in BC)$ е ъглополовяща на $\sphericalangle BAC$.

а) Ако $\sphericalangle ACB > 90°$ и върху най-голямата страна на $\triangle ABC$ е взета точка P така, че $\sphericalangle PMB = \sphericalangle BAC$, да се докаже, че $MP = MC$.

б) Нека $\sphericalangle ACB = 90°, AM = 7$ cm и AM пресича BC под ъгъл, равен на един от ъглите на $\triangle ABC$. Да се намерят острите ъгли на $\triangle ABC$ и височината му през върха C.

(ТУЕС, София, 1999 г.)

Отг.: б) $30°, 60°$, 5,25 cm.

143. Да се реши:

а) уравнението $x^2 - \dfrac{3 - \dfrac{x}{2}}{4} = 0,25(1+2x)(2x-1) + 0,5x$;

б) неравенството $1 - \dfrac{2x-3}{2} + \dfrac{x^2}{3} < \dfrac{(x+2)^2}{3} + \dfrac{x}{-2}$ и да се провери кои от решенията на уравнението $|2 - x| = 5$ са решения и на неравнството.

(ТУЕС, София, 2000 г.)

Отг.: а) $x = -\dfrac{4}{3}$; б) $x > \dfrac{7}{11}$; $x = 7$ е решение и на неравнството.

144. За три дни учениците от един клас предали 120 kg вторични суравини. През първия ден били предадени с 40% повече от втория, а през третия ден $\dfrac{2}{3}$ от количеството, предадено през първите два дни.

а) По колко килограма е предал класът през всеки от трите дни?

б) Количествата, предадени от момичетата и момчетата за всеки от дните се отнасят съответно както 2:1. По колко килограма вторични суровини са предали момчетата през всеки от дните?

(ТУЕС, София, 2000 г.)

Отг.: а) 42 kg, 30 kg, 48 kg; б) 14 kg, 10 kg, 16 kg.

145. В $\triangle ABC$ отсечката CL е вътрешна ъглополовяща (L принадлежи на AB), а AC е най-голямата му страна. Отсечката BN е перпендикулярна на CL и N принадлежи на страната AC. Отсечката BM е успоредна на CL и M принадлежи на правата AC. Да се докаже, че:

а) $CM = CB = CN$ и $\sphericalangle ABM > 90°$.

б) $LA > LB$.

(ТУЕС, София, 2000 г.)

146. Даден е правоъгълникът $ABCD$ ($AB > AD$). Върху страната CD е взета точка M така, че $AM = AB$. Върху AM е взета точка N така, че $AN = DM$. Да се докаже, че:

а) BN е перпендикулярна на AM.

б) Ако $\sphericalangle MAB = 30°$, то $AB = 2AD$.

(ТУЕС, София, 2000 г.)

147. а) Да се реши неравенството

$$\left(\frac{x}{3} - 1\right)^2 - \left(1 + \frac{x}{3}\right)^2 \leq \left(1 + \frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2} - 1\right) + 0,5\left(6 - \frac{x^2 + 4x}{2}\right).$$

б) Да се намерят стойностите на параметъра a, за които уравнението

$$\frac{8a^2}{9} + 2(x-2) = x\left(x - \frac{2a}{3}\right) - \left(x - \frac{a}{3}\right)^2$$

има положителен корен.

(ТУЕС, София, 2004 г.)

Отг.: а) $x \geq -6$; б) $a \in (-2; 2)$.

148. В две кутии има храна за папагали. Храната е смес от просо и овес. В едната кутия има 0,4 kg храна, като отношението на просото и овеса е 5:3, а в другата кутия има 1,2 kg храна, като отношението на просото и овеса е 11:5.

а) Да се определи колко грама просо и колко грама овес има общо в двете кутии.

б) Ако в хранилката за папагали се сипят равни количества храна от двете кутии, какво ще бъде отношението на просото и овеса?

(ТУЕС, София, 2004 г.)

Отг.: а) 1075 g просо, 525 g овес; б) 21:11.

149. В триъгълник ABC височината AD $(D \in BC)$ е равна на BD и $\sphericalangle BAC = \frac{1}{2}(\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB)$.

а) Да се намерят мерките на ъглите на триъгълник ADC.

б) Да се докаже, че $S = \frac{b}{4}(b+c)$, където S е лицето на $\triangle ABC$, $b = AC$ и $c = AB$.

(ТУЕС, София, 2004 г.)

Отг.: а) $\sphericalangle CAD = 15^\circ$, $\sphericalangle ADC = 90^\circ$, $\sphericalangle DCA = 75^\circ$.

150. Даден е квадрат $ABCD$ и точки $M \in AB$ и $N \in BC$, за които $BM : MA = BN : NC$. Върху правата, минаваща през точките N и D, е избрана точка P така, че D е среда на отсечката NP.

а) Да се докаже, че $\sphericalangle BMP = 135^\circ$.

б) Нека Q е пресечната точка на отсечките AD и MP. Да се намери отношението $\frac{BM}{MA}$, ако $\frac{DQ}{QA} = a$.

(ТУЕС, София, 2004 г.)

Отг.: б) a.